Fórmulas generales para la determinación de áreas y volúmenes

José Martel Moreno
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

RESUMEN

Con este trabajo se consigue reducir las distintas fórmulas, que sirven para determinar las áreas de figuras planas y espaciales, a unas pocas de carácter general. Del mismo modo para las de los volúmenes de los diferentes cuerpos geométricos.

Asimismo, se estudia la fórmula de Simpson, que, prácticamente, se puede utilizar para determinar la casi totalidad de los volúmenes de las figuras espaciales. Se hace, además, una aplicación de esta fórmula para las áreas de las figuras planas que cumplan ciertas condiciones. Finalmente se hace un estudio de algunas fórmulas que dan un valor aproximado del volumen de un tonel.

ABSTRACT

This paper aims at reducing the different formulae that serve to calculate the areas of plane and spatial figures to a few of general character. In the same way for those of the volumes of the distinct solids.

Simpson's formula is studied too, as it helps to determine practically the whole of volumes of spatial figures. An application of this formula is also made for the areas of plane figures fulfilling some conditions. Finally, a study of some formulae giving an approximate value of the volume of a barrel is carried out.

Un conocimiento profundo de las cosas no lo obtendremos ni ahora ni nunca, en tanto no las contemplemos en su crecer desde el principio (Aristóteles, en *Política*).

1. Áreas de superficies planas

1.1. *Áreas de paralelogramos, triángulos y trapecios*

Para determinar el área de un paralelogramo, de un triángulo o de un trapecio, bastará con aplicar la fórmula siguiente:

(1) $$\text{Área} = \textit{Medida de la base media} \times \textit{medida de la altura} = B_m \times h$$

siendo *M* y *N* los puntos medios de los lados respectivos, *MN* la base media y *h* la medida de la altura correspondiente al lado *AB*. Por otro lado, es fácil de probar que en todo paralelogramo (fig. 1),

$$AB = MN = CD,$$

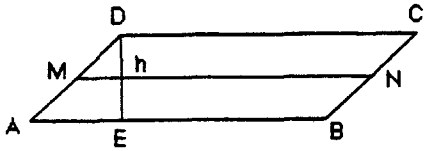


Fig. 1

que en cualquier triángulo (fig. 2),

$$MN = \frac{AB}{2}$$

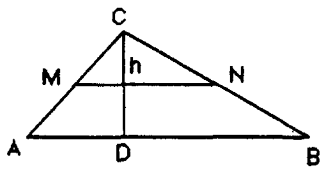


Fig. 2

y que en un trapecio cualquiera (fig. 3)

$$MN = \frac{AB + CD}{2}.$$

El trapecio se podría considerar como una generalización del paralelogramo (en el caso en que AD y BC fuesen paralelos) y del triángulo (cuando D y C coincidan).

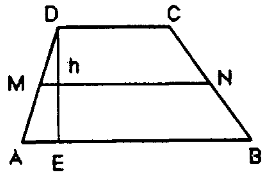


Fig. 3

1.2. Polígonos regulares

La fórmula (1) vale también para un polígono regular sin más que sustituir la base media por el contorno medio y la altura por la apotema del polígono. Así, de la fig. (4), se desprende que

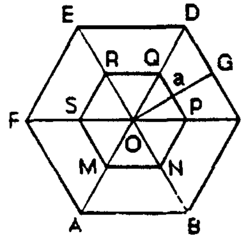


Fig. 4

(2) $$Área(ABCDEF) = C_m \times a,$$

siendo C_m = la medida del contorno medio *(MNPQRS)* y a = la medida de la apotema *OG*.

Del mismo modo podríamos determinar el área de una corona circular multiplicando la medida de la circunferencia media por la medida de su anchura

De la fig. 5 se desprende

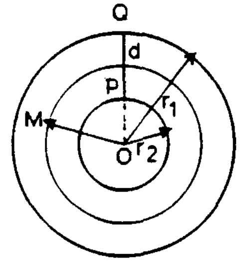


Fig. 5

(3) $$Área\ de\ la\ corona = 2\pi\frac{r_1 + r_2}{2} \times (r_1 - r_2) = \pi(r_1 + r_2)d = C_m \times d,$$

siendo d la medida de la anchura de la corona y C_m la medida de la circunferencia media.

Si r_2=0 y r_1=d=r, la fórmula (3)se convertirá en la del área de un círculo; esto es,

(3 bis) $$Área\ del\ círculo = \pi r^2.$$

En un polígono que no sea regular, por carecer de apotema, no será de aplicación la fórmula (2), por lo que habrá que descomponerlo en figuras cuyas áreas sean conocidas.

1.2.1. *La longitud de la circunferencia como derivada del área del círculo*

Sean dos círculos de radios r y $r+d$. La diferencia de sus áreas será

$$A(r+d)-A(r)=\pi(r+d)^2-\pi r^2=\pi(2rd+d^2),$$

y el cociente incremental $\dfrac{A(r+d)-A(r)}{d}=\pi(2r+d)$,

cuyo límite cuando $d \to 0$, dará la fórmula de la longitud de la circunferencia. Intuitivamente, se puede ver como el ánillo circular se ha transformado en una circunferencia al coincidir los radios r_1 y r_2.

2. Las áreas en el espacio

2.1. *Área del prisma, de la pirámide y del tronco de pirámide*

Observando las fórmulas que dan las áreas laterales de un prisma regular, una pirámide regular o un tronco de pirámide regular, se ve que todas ellas están comprendidas en la siguiente:

(4) $$\acute{A}rea = C_m \times h_l,$$

siendo C_m el perímetro de la sección media de la superficie lateral y h_l la medida de la altura de las caras laterales (o apotema cuando se trata de una pirámide o tronco de pirámide).

Cuando se trata de un prisma recto que no sea regular la fórmula anterior sigue siendo válida, pero si el prisma es oblicuo habrá que sustituirla por esta otra

(4 bis) $$\acute{A}rea = C_{sr} \times g,$$

siendo C_{sr} el perímetro de la sección recta (determinada por un plano perpendicular a todas las aristas) y g la arista lateral del prisma.

Cuando la pirámide o el tronco de pirámide no sean regulares habrá que hallar el área de cada una de sus caras laterales para la determinación de sus áreas laterales.

Es evidente que si se quiere hallar el área total de cada uno de estos cuerpos habrá que agregar al área lateral el área de sus bases respectivas.

2.2. *Áreas del cilindro, del cono y del tronco de cono*

El área lateral de un cilindro recto circular, de un cono recto circular o de un tronco de cono circular viene dada por la siguiente fórmula:

(5) $$\acute{A}rea = C_m \times g \,,$$

siendo C_m la medida de la longitud de la circunferencia de la sección media y g la medida de la generatriz.

La fórmula (5) se puede poner también como sigue

(5 bis) $$\acute{A}rea = \pi(r_1 + r_2)g \,,$$

que valdrá para el cilindro cuando $r_1=r_2=r$, para el cono cuando $r_2=0$ y para el tronco de cono cuando $r_1 \neq r_2$.

2.3. *Área de las figuras esféricas*

En los libros de geometría elemental se demuestra que el área de la superficie engendrada por una poligonal regular que gira alrededor de un eje coplanario que pasa por su centro y que no la atraviesa viene dada por la siguiente fórmula

(6) $$\acute{A}rea = 2\pi a \times h \,,$$

donde a es la medida de la apotema de la poligonal (o la medida del radio de la circunferencia inscrita en la misma) y h la medida de la proyección de la poligonal sobre el eje.

Aplicando esta fórmula para el caso en que la poligonal sea un arco de circunferencia la fórmula (6) se transforma en la siguiente:

(6 bis) $$\acute{A}rea = 2\pi R \times h = C_M \times h \,,$$

donde C_M es la medida de la longitud de una circunferencia máxima.

De la fórmula (6 bis) se deducen inmediatamente las áreas de la superficie esférica, zona esférica y casquete esférico, sin más que sustituir h por su valor, que en el caso de la superficie esférica será la medida del diámetro.

Por otro lado, de la fórmula (6) y de la fig. 6 se deduce esta otra para el casquete engendrado por el arco correspondiente a la cuerda CD

(7) $$\acute{A}rea = 2\pi R h_1 = \pi c_1^2,$$

siendo h_1 la medida de MD y c_1 la de la cuerda CD. Del mismo modo para el casquete engendrado por el arco ACD

(8) $$\acute{A}rea = 2\pi R h_2 = \pi c_2^2,$$

donde h_2 es la medida de ND y c_2 la de la cuerda AD. La diferencia entre (8) y (7) dará otra manera de expresar el área de la zona esférica engendrada por el arco ABC; esto es,

(9) $$\acute{A}rea = \pi (c_2^2 - c_1^2).$$

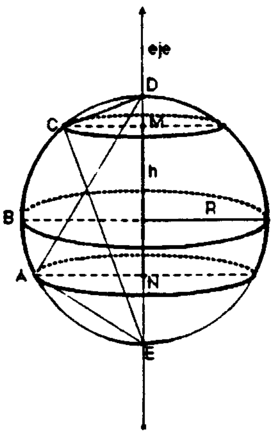


Fig. 6

2. Volúmenes de sólidos

2.1. *Prismatoides o prismoides*

Un prismatoide o prismoide es un poliedro cuyos vértices están situados en dos planos paralelos.

En la fig. 7, (ABCDE) y (FGHI) son las bases del prismatoide. (MNPQRST) es la sección intermedia o equidistante que viene determinada por un plano que pasa por los puntos medios de las aristas laterales y que, a su vez, está situada en un plano que es paralelo a los que contienen las bases. Como se puede observar, las caras laterales son triángulos o trapecios.

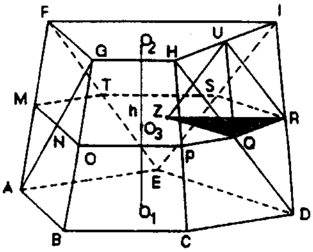


Fig. 7

A continuación se demostrará que el volumen de un prismatoide viene dado por la siguiente fórmula:

(10) $$V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4B_3),$$

siendo $B_1 = Área(ABCDE)$, $B_2 = Área(FGHI)$ y $B_3 = Área(MNOPQRST)$ y h la medida de la altura O_1O_2.

Sabido es que al unir los puntos medios de los lados de un triángulo cualquiera queda dividido en cuatro triángulos iguales. Sea Z un punto interior de la base intermedia y DHI uno de los triángulos laterales. Uniendo Z con los puntos medios de los lados del referido triángulo se forma el tetraedro ZQRU, tal como indica la fig. 6. El volumen de dicho tetraedro será

$$V^* = \frac{1}{3}Área(QRU)\times h_Z = \frac{1}{3}Área(ZQR)\times h_U = \frac{1}{3}Área(ZQR)\times\frac{h}{2} = \frac{1}{6}Área(ZQR)\times h.$$

Haciendo lo mismo con los otros tres triángulos; esto es, uniendo Z con QHU, RUI y DQR, se forman otros tres tetraedros equivalentes al ZQRU, por lo que, el volumen del tetraedro ZDHI será

$$V_i = 4\times Área(ZQR)\times\frac{h}{6}.$$

Haciendo lo mismo con los vértices de todos los triángulos laterales (si se trata de un trapecio se dividirá en dos triángulos mediante una diagonal) se obtendrá,

$$\sum V_i = 4\sum Áreas(ZQR)\times\frac{h}{6} = 4Área(MNOPQRST)\times\frac{h}{6} = 4B_3\times\frac{h}{6},$$

ya que ZQR barrerá toda la sección intermedia.
Uniendo, finalmente, Z con los vértices de las dos bases se obtendrán dos pirámides que tienen de altura la mitad de la del prismatoide. Sumando todos estos volúmenes se obtendrá

$$V = \frac{1}{3}B_1\times\frac{h}{2}+\frac{1}{3}B_2\times\frac{h}{2}+4B_3\times\frac{h}{6} = \frac{h}{6}(B_1+B_2+4B_3),$$

como se quería demostrar.

3.2. *Aplicaciones de la fórmula del prismatoide*

3.2.1. *Volumen del tronco de pirámide y del tronco de cono*

Los volúmenes del prisma y la pirámide, así como los del cilindro y cono, se pueden determinar perfectamente aplicando la fórmula (10) del prismatoide[1] (en la pirámide y en el cono una de las bases se ha transformado en un punto).

A continuación se demostrará que también es válida para el tronco de pirámide, y, por consiguiente, para el tronco de cono.

De la semejanza de los polígonos ABCD, EFGH y MNPQ, fig. 8, se deduce:

$$(11) \qquad \frac{B_1}{B_2} = \frac{(h+x)^2}{x^2},$$

$$(12) \qquad \frac{B_1}{B_3} = \frac{(h+x)^2}{(\frac{h}{2}+x)^2},$$

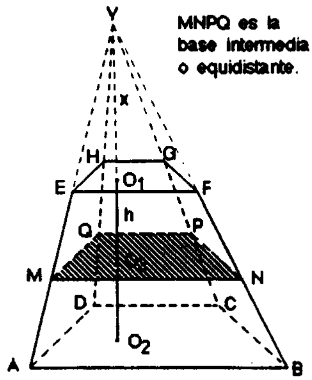


Fig. 8

siendo B_1, B_2 y B_3 las áreas de los citados polígonos. Eliminando x entre (11) y (12), se tiene la expresión

$$(13) \qquad B_1 + B_2 + 2\sqrt{B_1 B_2} = 4B_3$$

[1] El volumen del dodecaedro regular, así como el del icosaedro regular, se pueden determinar también mediante la fórmula del prismatoide. Para el primero, basta con trazar por ciertos vértices del mismo dos planos paralelos a una de sus caras, con lo que queda dividido en tres prismatoides, siendo iguales los dos exteriores. Sumando los volúmenes de los mismos, se obtiene, después de un cálculo algo laborioso, lo que sigue

$$V_{12} = \frac{l^3}{4}(15+7\sqrt{5}),$$

siendo l la arista. La sección intermedia del prismatoide central es un decágono regular de lado $l_{10} = \frac{diagonal\ de\ una\ cara}{2} = \frac{l(\sqrt{5}+1)}{4}$, que facilitará el cálculo de la distancia del centro del dodecaedro a una cualquiera de sus caras, lo que permitirá la determinación del volumen del dodecaedro con mucha más facilidad.

En el caso del icosaedro, los dos planos paralelos determinan dos pirámides pentagonales regulares y un antiprisma pentagonal. La suma de sus volúmenes da para el icosaedro el siguiente valor:

$$V_{20} = \frac{5}{12} l^3 (3+\sqrt{5}).$$

Lo mismo que en el dodecaedro, la sección intermedia del prismatoide central (antiprisma), resulta ser un decágono regular de lado $l_{10} = \frac{l}{2}$, que facilitará también, por otro camino, el cálculo del volumen del icosaedro (Ver anexo IV).

Sustituyendo $4B_3$ en la fórmula del prismatoide se obtiene la conocida fórmula del tronco de pirámide, o sea,

$$(14) \qquad V = \frac{h}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}).$$

Aplicando ahora la fórmula del prismatoide al tronco de cono (fig. 9), se tiene

$$(15) \qquad V = \frac{h}{6}(\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + 4\pi(\frac{r_1 + r_2}{2})^2) = \frac{h}{3}\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2),$$

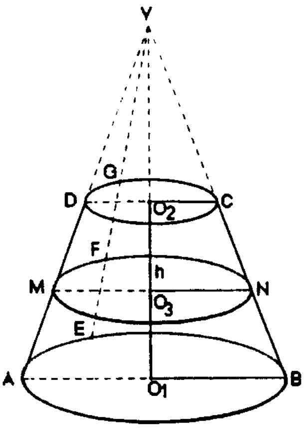


Fig. 9

siendo r_1 la medida del radio O_1B, r_2 la de O_2C y h la altura O_1O_2. El radio medio viene dado por O_3N, cuya medida es $\frac{r_1 + r_2}{2}$.

3.2.2. *Volumen del sector esférico, de la esfera y de los segmentos esféricos*

También en los libros de geometría elemental se demuestra que el volumen engendrado por un sector poligonal regular que gira en torno de un eje de su plano y que pasa por su centro sin atravesarlo, es igual al área engendrada por la poligonal por un tercio de su apotema. Cuando el número de lados de la poligonal crezca indefinidamente, se acercará, en el caso límite, a un arco de circunferencia, por lo que , el volumen de un sector esférico vendrá dado por la siguiente fórmula:

$$(16) \qquad V = 2\pi Rh \times \frac{R}{3} = 4\pi R^2 \times \frac{h}{6} = \frac{1}{6} Área_{SE} \times h,$$

siendo $Área_{SE}$ el área de la superficie esférica y h la medida de la proyección del arco sobre el eje (diámetro).

Cuando el arco es una semicircunferencia, el sector esférico se transformará en una esfera; esto es,

$$(17) \qquad V = \frac{1}{6} \times 4\pi R^2 \times 2R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Para determinar el volumen de un segmento esférico de una sola base, habrá que sumarle o restarle al sector esférico correspondiente el del cono de centro O, según que contenga o no una circunferencia máxima. Pero para el segmento esférico de dos bases o *rebanada* esférica habrá que sumarle a la diferencia de los sectores esféricos correspondientes los dos conos de centro O que se forman si contiene una circunferencia máxima o restarle uno de ellos si no la contiene.

Sin embargo, aplicando la fórmula del volumen del prismatoide sale inmediatamente el resultado (17). En efecto,

$$V = \frac{2R}{6}(0+0+4\times\pi R^2) =$$
$$\frac{4}{3}\pi R^3.$$

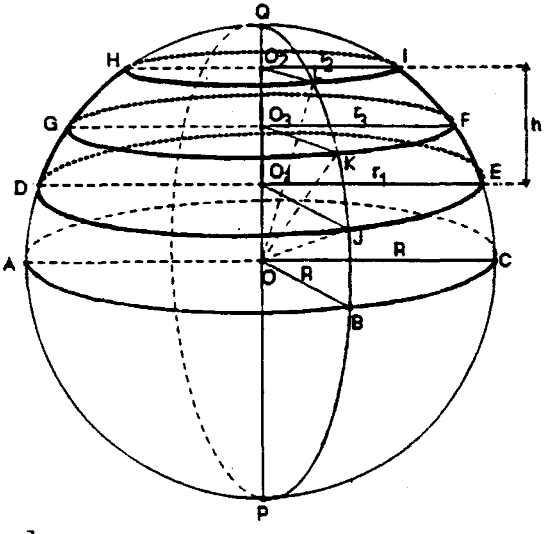


Fig. 10

Del mismo modo para el segmento esférico de dos bases (fig. 10), que no contenga una circunferencia máxima, su volumen será,

$$V = \frac{h}{6}(\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + 4\pi r_3^2) =$$

$$\text{(18)} \quad \frac{\pi h}{6}\left[r_1^2 + r_2^2 + (2r_1^2 + 2r_2^2 + h^2)\right] =$$

$$\frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

Cuando $r_2 = 0$, (18), dará el volumen del segmento esférico de una sola base; o sea,

$$\text{(19)} \qquad V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + h^2) = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h).$$

Y si, además, $h=R$, saldrá el volumen de una semiesfera, y por tanto el de la esfera como suma de dos semiesferas.

Asimismo, el volumen de un elipsoide, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, de semiejes a, b y c, (fig. 11), dará como resultado

$$(20) \qquad V=\frac{2c}{6}(0+0+4\times\pi ab)=\frac{4}{3}\pi abc,$$

donde $B_1=B_2=0$, y $B_3=\pi ab$, siendo *a, b* y *c*, las medidas de OA, OB y OE (semiejes).

Nuevamente, se obtiene el volumen de la esfera como caso particular de (20), cuando los tres semiejes coincidan.

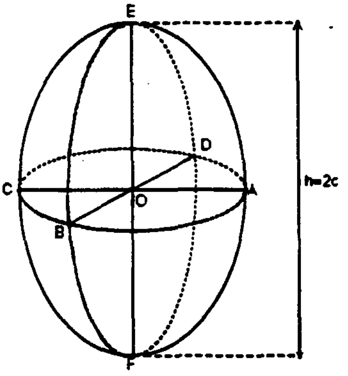


Fig. 11

Para hallar el volumen del hiperboloide de una hoja, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, comprendido entre los planos $z=\pm\frac{h}{2}$, bastará con determinar las áreas de las bases del cuerpo resultante (fig. 12):

$$B_1=\pi\times a\sqrt{\frac{h^2}{4c^2}+1}\times b\sqrt{\frac{h^2}{4c^2}+1}=$$

$$\pi ab(\frac{h^2}{4c^2}+1)=B_2,$$

y la de base intermedia:

$$B_3=\pi ab,$$

dando como resultado final el siguiente

$$(21) \qquad V=\frac{\pi abh}{12c^2}(12c^2+h^2)$$

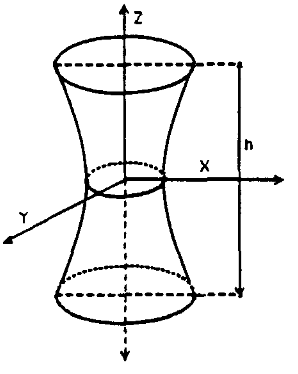


Fig. 12

En cuanto al hiperboloide de dos hojas, $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, el volumen que resulta al cortar una de las hojas por el plano $z=c+h$, será

$$V=\frac{h}{6}(0+\pi ab\frac{h^2+2ch}{c^2}+4\times\pi ab\frac{h^2+4ch}{4c^2})= \qquad (22)$$
$$\frac{\pi abh^2}{3c^2}(h+c),$$

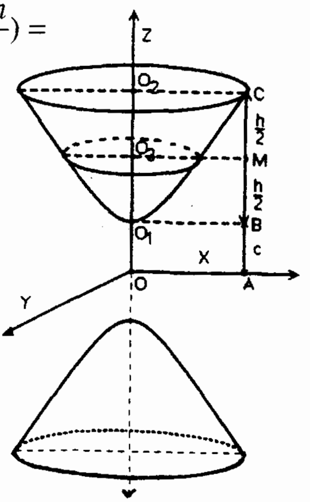


Fig. 13

siendo la sección intermedia la determinada por el plano

$z=c+\frac{h}{2}$. (Fig. 13)

Finalmente, para el paraboloide elíptico, $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, el volumen del sólido que resulta al cortar por el plano $z=h$, vendrá dado por

$$V=\frac{h}{6}(0+\pi ab+4\times\frac{\pi ab}{2})=\frac{\pi}{2}abh,$$

siendo $a=\sqrt{2hp}$, $b=\sqrt{2hq}$, y B_3=área de la sección intermedia que resulta al cortar por el plano $z=\frac{h}{2}$. (Fig. 14)

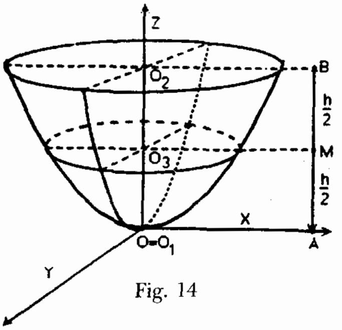


Fig. 14

Más adelante se justificará (párrafo **4**) la razón por la que se puede utilizar la fórmula que da el volumen del prismatoide a las diferentes cuádricas citadas.

3.3. *El área de la superficie esférica como derivada del volumen de la esfera*

Sean dos esferas cuyos radios midan respectivamente $r_1=r$ y $r_2=r+d$, la diferencia entre ambos volúmenes será

$$V(r+d)-V(r)=\frac{4}{3}\pi\left[(r+d)^3-r^3\right]=\frac{4}{3}\pi(3r^2d+3rd^2+d^3),$$

y el cociente incremental

$$\frac{V(r+d)-V(r)}{d}=\frac{4}{3}\pi(3r^2+3rd+d),$$

cuyo límite cuando $d \to 0$, es el área de la superficie esférica c. s. q. p.

3.4. *Otros prismatoides*

En una de las obras atribuidas a Herón de Alejandría (s. II a. C. al s. II d. C.?), *Stereometrica II*, aparece el volumen de un sólido de bases dos rectángulos, de lados respectivamente paralelos, pero no necesariamente semejantes, por lo que no se trata de un tronco de pirámide (fig. 15). Esta figura recibió el nombre de $\beta\omega\mu\iota\sigma\kappa o\varsigma$ ("pequeño altar").

Aunque Herón calculó dicho volumen descomponiéndolo en cuerpos, cuyos volúmenes eran conocidos, aquí se hará aplicando directamente la fórmula que da el volumen del prismatoide, esto es,

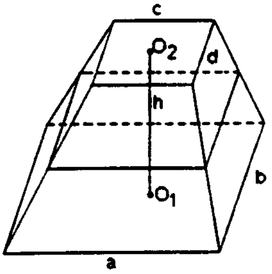


Fig. 15

$$V=\frac{h}{6}(ab+cd+4\times\frac{a+c}{2}\times\frac{b+d}{2})=$$

$$(23)\qquad \frac{h}{6}\{2(ab+cd)+ad+bc\}.$$

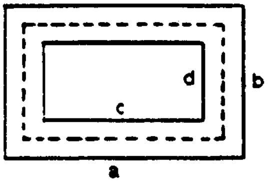
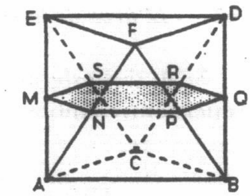


Fig. 16

Este resultado servirá también para calcular la capacidad de artesas (fig. 16, de $\alpha\rho\tau o\varsigma$ = pan de trigo); vagonetas, carretillas, pilones, etc. Cuando la base superior se transforme en un segmento ($c=0$, o $d=0$) la fórmula (23) dará el volumen de una cuña triangular [2].

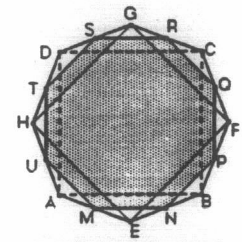


Antiprisma de base triangular (Octaedro regular)

Fig. 17

También son casos particulares de los prismatoides los *antiprismas*. Estos son poliedros, cuyas bases son dos polígonos regulares iguales, estando uno de ellos girado de tal manera que cada uno de sus vértices equidista de dos vértices del otro. Además, las caras laterales son triángulos equiláteros, puesto que todas sus caras han de ser polígonos regulares. (No hay que olvidar que los *antiprismas* son también casos particulares de los *poliedros arquimedianos*). El antiprisma más sencillo coincide con el octaedro regular (fig. 17).

En la fig. 18 aparece el antiprisma cuyas bases son dos cuadrados iguales. Un sencillo cálculo, dará para el volumen de este cuerpo lo que sigue:



Antiprisma de base cuadrada

Fig. 18

$$(24)\qquad V=\frac{h}{6}\left[a^2+a^2+4\times\frac{(1+\sqrt{2})a^2}{2}\right]=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}}\times(2+\sqrt{2})}{6}a^3,$$

siendo a la medida de la arista.

Por último, el volumen de la cuña cilíndrica[1], conocida también como *casco* o *pezuña* (fig. 19), se determina, fácilmente, mediante la fórmula del volumen del prismatoide resultando,

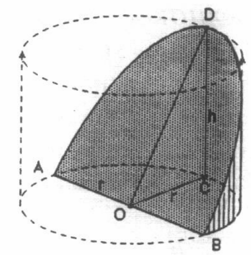


Fig. 19

$$(25)\qquad V=\frac{2r}{6}(0+0+4\times\frac{rh}{2})=\frac{2}{3}r^2h.$$

[2] También era conocido el volumen de la cuña ($\sigma\phi\eta\nu\iota\sigma\kappa o\varsigma$ =cuña pequeña) por Herón de Alejandría, como así la describe en *Stereometrica I*. Igualmente menciona Herón, en la misma obra, el caso en que $a=c$ (o $b=d$) con el nombre de $o\nu\upsilon\xi$ =uña o casco, dando para el volumen el valor $\frac{a(b+d)h}{2}$, resultado que se desprende también de la fórmula 23.

3.5. *La fórmula del prismatoide en el plano*

La figura correspondiente al prismatoide en el plano no es otra que el trapecio, ya que es el único cuadrilátero convexo cuyos vértices están situados en dos rectas paralelas no coincidentes.

Es fácil demostrar que su área se puede determinar también aplicando la fórmula (10), sin más que sustituir las áreas de las bases del prismatoide por las medidas de las longitudes de las bases del trapecio. En efecto, sea P un punto cualquiera de la base media (fig. 20). Al unirlo con los extremos de las bases se obtienen seis triángulos cuyas áreas tiene por suma:

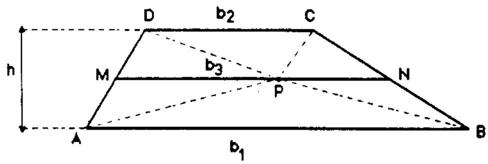


Fig. 20

$$(26) \quad A = \frac{b_1 h}{4} + \frac{b_2 h}{4} + \frac{2b_3 h}{4} = \frac{h}{4}(b_1 + b_2 + 2b_3) = \frac{h}{6}\left[\frac{3}{2}(b_1 + b_2) + 3b_3\right] = \frac{h}{6}(b_1 + b_2 + 4b_3) \cdot$$

Esta fórmula será válida también para calcular el área de cualquier paralelogramo o triángulo, así como la del trapecio curvilíneo CDEF (fig. 21), resultando para éste:

$$A_T = \frac{r_1 - r_2}{6}\begin{bmatrix} med.(arcoEF) + med.(arcoDC) + \\ 4 \times med.(arcoNM) \end{bmatrix},$$

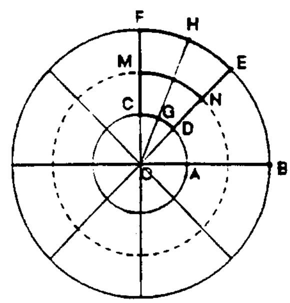


Fig. 21

siendo r_1 y r_2, respectivamente, las medidas de OB y OA. Sumando el resto de los trapecios, se tendría para el área de la corona circular

$$A = \frac{r_1 - r_2}{6}(2\pi r_1 + 2\pi r_2 + 4 \times 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2}) = \pi(r_1^2 - r_2^2),$$

que para $r_2 = 0$ y $r_1 = r$, dará el área del círculo.

El área del círculo se podría hallar también (fig.22), multiplicando por cuatro el área de un cuadrante. En efecto,

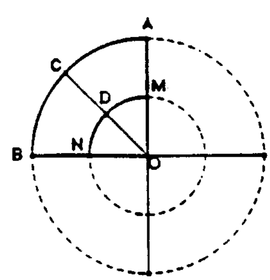


Fig. 22

$$A = 4\times\frac{r}{6}(\frac{2\pi r}{4} + 0 + 4\times\frac{2\pi\frac{r}{2}}{4}) = \pi r^2 .$$

Cabría la tentación de utilizar la fórmula (26) para determinar el área del trapecio curvilíneo de la fig. 23 (segmento circular de dos bases); pero, como se demostrará en **4.1,** el valor obtenido sería sólo aproximado[3]; sin embargo, se podría hallar el valor exacto descomponiéndolo en dos sectores circulares y un triángulo tal como se indica en la figura citada. (Ver punto **6**).

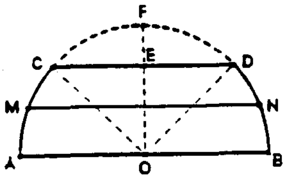


Fig. 23

4. La regla de Simpson

Sea un cuerpo geométrico limitado por dos planos paralelos $z=0$ y $z=h$, tal que el área de la sección por un plano $z=z_1$ sea una función polinómica de tercer orden

(27) $$A(z_1) = az_1^3 + bz_1^2 + cz_1 + d$$

Entonces el volumen del sólido limitado por dichos planos vendrá dado por

(28) $$V = \int_0^h A(z_1)dz_1 = \frac{a}{4}h^4 + \frac{b}{3}h^3 + \frac{c}{2}h^2 + dh .$$

[3] La aproximación no es mala, pues si se divide, por ejemplo, el radio OF (fig. 23) en 32 partes equidistantes, mediante paralelas al diámetro, la suma de las áreas de todos los trapecios curvilíneos que se forman daría el siguiente resultado:

$$\frac{r}{6\times32}\left[2r+0+2(2\sum_{i=1}^{32-1}\sqrt{r^2-(\frac{ri}{32})^2})+4(2\sum_{i=1}^{32}\sqrt{r^2-(\frac{r(2i-1)}{64})^2})\right]=$$

$$\frac{2r^2}{6\times32}\left[1+\frac{2}{32}\sum_{i=1}^{32-1}\sqrt{32^2-i^2}+\frac{4}{64}\sum_{i=1}^{32}\sqrt{64^2-(2i-1)^2}\right]\cong 1{,}5703r^2$$

lo que supone un valor para π =3,1406. Si se tiene en cuenta que el círculo ha quedado dividido en 64 partes, este resultado no difiere mucho de 3,1410, valor obtenido por Arquímedes utilizando el perímetro de un polígono regular de 96 lados inscrito en una circunferencia de radio unidad.

De (27) y (28) se deduce

$$(29) \qquad V = \frac{h}{6}\left[A(0) + A(h) + 4A(\frac{h}{2})\right].$$

Esta expresión es conocida con el nombre de *regla de Simpson, de los tres pisos* o *de los tres niveles*, y que, como se ve, coincide con la ya conocida fórmula del volumen del prismatoide. Ahora, se está ya en condiciones de justificar las razones por las que se podía utilizar la fórmula del prismatoide para obtener el volumen de los distintos cuerpos ya considerados (para la esfera, elipsoide y cuña cilíndrica ver anexos I, II y III).

Conviene tener muy en cuenta que cuando no se verifica (27); esto es, cuando la sección por el plano *z=const.*, no sea una función polinómica de tercer grado (o de grado menor) en z, el valor dado por (28) es sólo aproximado.

Utilizando también el cálculo integral se puede demostrar fácilmente que la fórmula de prismatoide es aplicable para la determinación del volumen encerrado por una superficie reglada.

En efecto, sean $x=az+p$, $y=bz+q$, las ecuaciones de una generatriz cualquiera de una superficie reglada, donde a ,b ,p y q son funciones del parámetro t, y t_0 y t_1 dos valores del parámetro correspondientes a una misma generatriz. Entonces la sección producida por el plano *z=const.*, tendrá por área

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y dx = \int_{t_0}^{t_1} (bz+q)(\frac{da}{dt}z + \frac{dp}{dt})dt = z^2\int_{t_0}^{t_1} b\frac{da}{dt}dt + z\int_{t_0}^{t_1}(b\frac{dp}{dt} + q\frac{da}{dt})dt + \int_{t_0}^{t_1} q\frac{dp}{dt}dt,$$

que, como se puede ver, es un trinomio de segundo grado en *z*.

4.1. *La regla de Simpson en el plano*

En el caso del plano, el área comprendida entre el eje *OX*, una parábola de la forma $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ (que será cuadrática para $a_0=0$), y las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$, viene dada, como se demuestra fácilmente, por

$$(29 \text{ bis}) \qquad A = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f(\frac{a+b}{2})\right].$$

Si $f(x)$ es lineal, el valor dado por (29 bis) será el área de un trapecio (rectángulo) o la de un rectángulo; pero si $f(x)$ no es de la forma arriba indicada el área dada por (29 bis) será sólo aproximada.

Ejemplo: sea la parábola de ecuación, $y=4-x^2$, (fig. 24); el área determinada por dicha parábola, las ordenadas de los puntos E y F y el eje de las x, viene dada por (29 bis); esto es,

$$A=\frac{2}{6}\times[3+3+4\times(3+1)]=\frac{22}{3}\ u.c.$$

Si a esta área se le quita la del rectángulo, quedará para el segmento parabólico,

$$\frac{22}{3}-6=\frac{4}{3}\ u.c.,$$

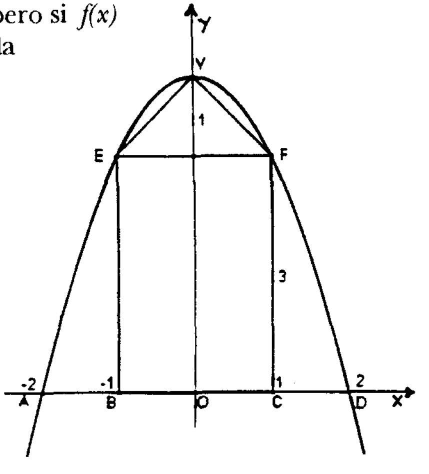


Fig. 24

y como el área del triángulo VEF es *1 u.c.*, se comprueba así la propiedad del segmento parabólico, demostrada por Arquímedes (s. III a.C.), que dice que el triángulo inscrito es los $\frac{3}{4}$ del segmento parabólico o que éste es los $\frac{4}{3}$ del triángulo.

5. Cálculo aproximado del volumen de un tonel

Entre las fórmulas empíricas más conocidas que dan un valor aproximado de la capacidad de un barril o tonel están las que siguen:

(30) $$V_1=0{,}2(D+d)^2 l,$$

(31) $$V_2=0{,}83Ddl,$$

(32) $$V_3=0{,}625k^3; \qquad k=\sqrt{(R+r)^2+(\frac{l}{2})^2},$$

(33) $$V_4=0{,}2618(2D^2+d^2)l,$$

donde $D=2R$, es la medida del diámetro interior del tonel, $d=2r$, la del diámetro interior de las bases y $l=h$ la de su altura interior (fig. 25). La fórmula (33), no es otra que la del prismatoide en la que se ha hecho $\frac{\pi}{12}=0{,}2618$.

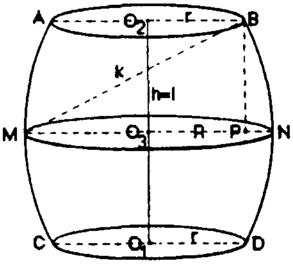


Fig. 25

Ejemplo. Sea un tonel con los siguientes datos:
$D=0{,}60m$, $d=0.51m$ y $l=0{,}90m$.
Las fórmulas anteriores (30-33) dan los siguientes valores expresados en litros:

$V_1=221{,}778l$
$V_2=228{,}582l$
$V_3=229{,}658l$
$V_4=230{,}931l$.

Ninguno de estos valores se puede considerar como exacto. Sólo se podría afirmar la exactitud de V_4, única y exclusivamente, en el caso en que las duelas del tonel pertenecieran a la superficie de un elipsoide de revolución (o, como caso particular, a la de una esfera) de centro O.

Afortunadamente, en la vida práctica, los toneles o barriles vienen ya aforados con bastante aproximación.

6. Consideraciones finales

- Todas las fórmulas que aparecen en **1.1** y **1.2** pueden obtenerse también mediante la (26). Así, por ejemplo, para determinar el área de una corona circular, bastaría con hacer en (26) las sustituciones que correspondan; esto es,

$$\acute{A}rea=\frac{h}{6}(b_1+b_2+4b_3)=\frac{d}{6}(2\pi r_1+2\pi r_2+4\times 2\pi\frac{r_1+r_2}{2})=\pi d(r_1+r_2).$$

- Del mismo modo, para todas las fórmulas consideradas en **2.1** y **2.2**, bastará con sustituir en la (26) lo que corresponda a la altura en los desarrollos de las superficies laterales (altura propiamente dicha, apotema de las caras laterales o la generatriz). Así para determinar el área de la superficie lateral de un tronco de cono:

$$Área = \frac{g}{6}(2\pi r_1 + 2\pi r_2 + 4\times 2\pi\frac{r_1+r_2}{2}) = \pi(r_1+r_2)g.$$

• Consecuentemente con **1.2.1**, y haciendo el ángulo DOC de la figura 23 (punto **3.5**), expresado en radianes, igual a α, se tiene para el sector circular lo que sigue:

$$Área\ del\ sector\ OCFD = \frac{1}{2}arco\times radio = \frac{1}{2}r\alpha\times r = \frac{1}{2}r^2\alpha, \quad y \quad \frac{d(\frac{1}{2}r^2\alpha)}{dr} = r\alpha;$$

esto es, la longitud del arco CFD, como era de prever.

Sin embargo, para el segmento circular se tendría:

$$Área\ de\ CDF = Área\ (Sector) - Área\ (Triángulo) = \frac{r^2}{2}\alpha - \frac{r^2}{2}\operatorname{sen}\alpha = \frac{r^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha),$$

cuya derivada será menor que la longitud del arco correspondiente, o sea ,

$$r(\alpha - \operatorname{sen}\alpha) = r\alpha - r\operatorname{sen}\alpha = arco - h_C = arco - \overline{CD}\cos\frac{\alpha}{2},$$

siendo $h_C = h_D$ las respectivas alturas de los vértices C y D en el triángulo COD. Con estos datos, el valor exacto del área del trapecio curvilíneo ACDB, vendrá dado por

$$Área_{TC} = Área\ (Semicírculo) - Área(Segmento) = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{r^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha) = \frac{r^2}{2}(\pi - \alpha + \operatorname{sen}\alpha).$$

• Todos los volúmenes de los sólidos considerados en **3.2.1, 3.2.2, 3.4** y otros no citados (con las limitaciones establecidas en **4.**) se pueden calcular, como efectivamente se ha hecho, mediante una sola fórmula: ¡la del *prismatoide*!

• Por último, de acuerdo con **3.3**, las áreas de las superficies consideradas en **2.3** (figuras esféricas), se pueden determinar también derivando con respecto al radio los volúmenes dados por las fórmulas (18) y (19). Efectivamente, llamando z_1 a la medida de OO_1 (fig. 10), la fórmula (18) tomará esta otra forma

$V = \frac{\pi h}{6}\left[3(R^2 - z_1^2) + 3(R^2 - (h+z_1)^2 + h^2\right]$, cuya derivada da por resultado

$\frac{dV}{dR} = \frac{\pi h}{6}(6R + 6R + 0) = 2\pi Rh = C_M \times h$, que no es otra que la fórmula general (6 bis) obtenida en **2.3**.

De igual manera, derivando la fórmula (19) con respecto al radio se volverá a obtener el mismo resultado anterior. En efecto, sustituyendo en dicha fórmula h por $R\text{-}z_1$ se tiene la siguiente expresión:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) = \frac{\pi}{3}(R - z_1)^2(2R + z_1)\text{, cuya derivada es}$$

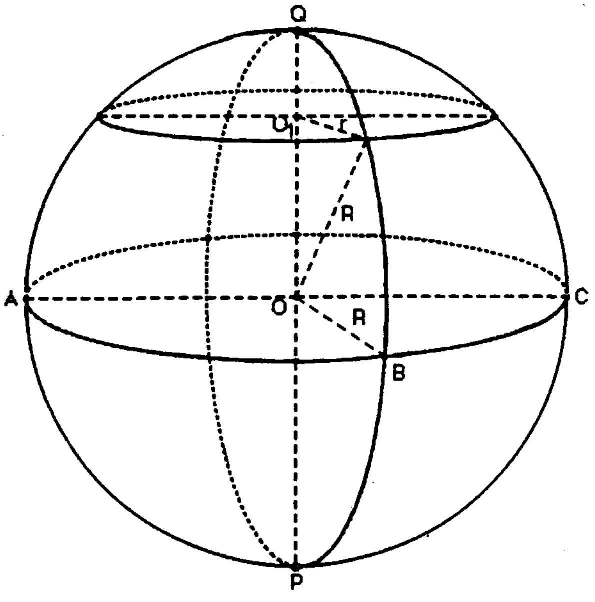
$$\frac{dV}{dR} = \frac{2\pi}{3}\left[(R - z_1)(2R + z_1) + (R - z_1)^2\right] = \frac{2\pi}{3}\left[h(3R - h) + h^2\right] = 2\pi Rh = C_M \times h,$$

c. s. q. p.

Por consiguiente, derivando con respecto a R, tanto la fórmula del volumen de una rebanada esférica como la de un segmento esférico, se obtiene siempre la misma fórmula general, $C_M \times h$, que, como ya se ha dicho, sirve para determinar el área de una zona esférica, de un casquete esférico o la de la propia superficie esférica, siendo en todos estos casos $C_M = 2\pi R$.

ANEXO I

La esfera



El área del círculo de centro O_1 es

$$\pi r^2 = \pi(R^2 - z^2),$$

siendo z la medida del segmento OO_1.
Pero por tratarse de un binomio de segundo grado en z se puede utilizar la fórmula del prismatoide para determinar el volumen de la esfera:

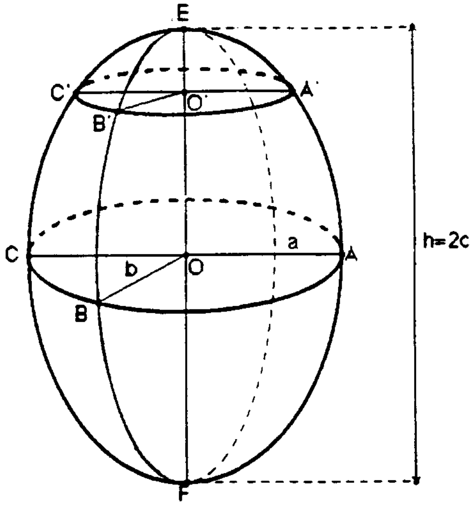
$$V = \frac{2R}{6}(0 + 0 + 4 \times \pi R^2) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ANEXO II

El elipsoide

Sea el elipsoide de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$



Al cortar por el plano $z=h_1$, resultará una elipse de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h_1^2}{c^2},$$

que tendrá por área

$$\pi a_1 b_1=\pi a\sqrt{1-\frac{h_1^2}{c^2}}\times b\sqrt{1-\frac{h_1^2}{c^2}}=\pi ab(1-\frac{h_1^2}{c^2})=$$

$$\frac{\pi ab}{c^2}(c^2-z^2),$$

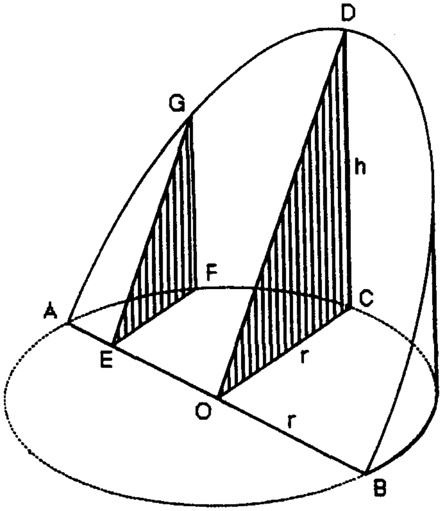
que es un binomio de segundo grado en z, lo que permite la aplicación de la fórmula del prismatoide para determinar su volumen:

$$V=\frac{2c}{6}(0+0+4\times\pi ab)=\frac{4}{3}\pi abc.$$

ANEXO III

Cuña cilídrica (casco o pezuña)

De la semejanza de los triángulos OCD y EFG se deduce:



$$(1)\,\frac{\acute{A}rea(OCD)}{\acute{A}rea(EFG)} = (\frac{OC}{EF})^2.$$

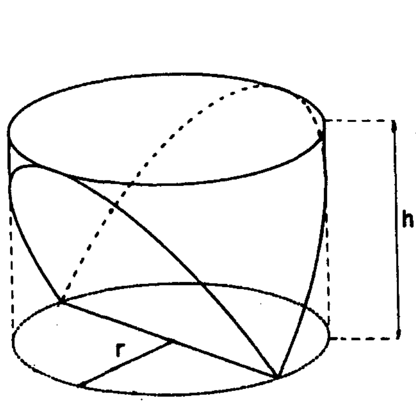
Si se considera AB como eje de las X y OC como de las Y, por pertenecer F a la circunferencia de centro O y radio r; se puede escribir, teniendo en cuenta (1), que

$$\acute{A}rea(EFG) = \frac{h}{2r}(r^2 - x^2),$$

que es un binomio de segundo en x, lo que permite el uso de la fórmula del prismatoide para determinar el volumen de de la cuña cilíndrica, y por tanto,

$$V = \frac{2r}{6}(0 + 0 + 4\times\frac{rh}{2}) = \frac{2}{3}r^2h.$$

La figura de la derecha muestra otro tipo de cuña cilídrica de base circular, cuyo volumen se deduce con facilidad utilizando el del *casco* o *pezuña*. En efecto,



$$2\times\frac{2}{3}r^2h + V_1 = \pi r^2 h \text{, de donde}$$

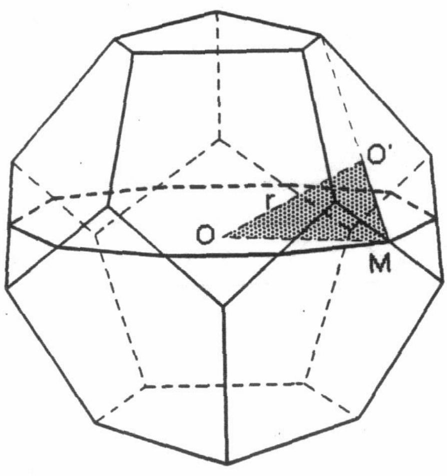
$$V_1 = r^2h(\pi - \frac{4}{3}).$$

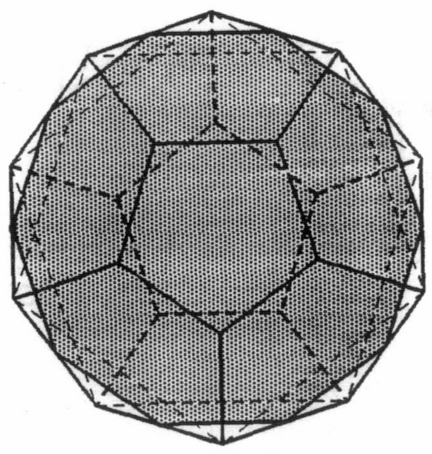
ANEXO IV

Dodecaedro

La base intermedia del prismatoide central es un decágono regular de lado $l_{10} = \dfrac{d_5}{2} = \dfrac{1}{4} l_5(\sqrt{5}+1) = \dfrac{r_{10}}{2}(\sqrt{5}-1)$; de donde $r_{10} = \dfrac{1}{4} l_5(3+\sqrt{5}) = OM$;

$O'M = a_5 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} \times \dfrac{2l}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}$; con $l_5 = l$ = arista del dodecaedro. La distancia del centro a una cualquiera de sus caras es $OO' = r$ = radio de la esfera inscrita. Resolviendo el triángulo rectángulo $OO'M$, se obtiene $r = \dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{25+11\sqrt{5}}{10}}$, que permite calcular más fácilmente el volumen del dodecaedro.





Dodecaedro

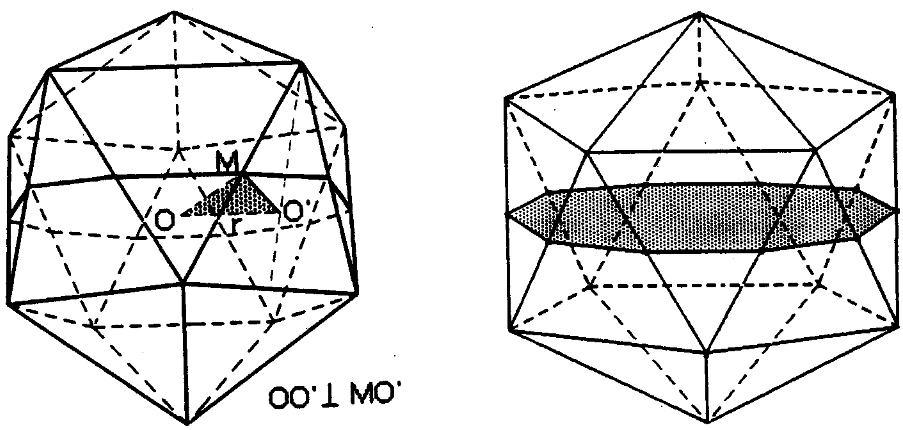
Icosaedro

$O'M = \dfrac{1}{3}$ de la altura de cualquiera de sus caras $= \dfrac{1}{6} l\sqrt{3}$, $OM = r_{10}$,

$l_{10} = \dfrac{l}{2} = \dfrac{r_{10}}{2}(\sqrt{5}-1) \Rightarrow r_{10} = \dfrac{l(\sqrt{5}+1)}{4}$ Del triángulo rectángulo *OO'M*, se deduce

$$(OO')^2 = r^2 = (OM)^2 - (O'M)^2 = l^2 \frac{14+6\sqrt{5}}{4^2 \times 3},$$

de donde $r = \dfrac{l}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15})$, que también permite determinar fácilmente el volumen del icosaedro en función de la arista.



Icosaedro

Bibliografía

BOLL, Marcel (1966): *Historia de las Matemáticas,* Editorial Diana, S.A., México, D.F. (Título original: *Histoire des Mathématiques*, Collection que sais-je?).

BOYER, Carl B. (1986): *Historia de la Matemática* , AUT/94, Madrid.

CAJORI, Florian (1985): *A History of Mathematics,* 4th Edition, Chelsea Publishing Company, USA.

CASTELNUOVO, Emma (1972): *Documenti di un'Esposizione di Matematica,* Boringhieri Editore, Torino.

EVES, Howard (1983): *Great Moments in Mathematics. Before 1650,* DME, nº 5, USA.

GLASER, Robert (1920): *Stereometrie*, GJG, Berlin und Leipzig.

HEATH, Sir Thomas (1981): *A History of Greak Mathematics. From Aristarchus to Diophantus,* Volume II, Dover Publications, Inc., USA.

MOISE, Edwin E. and DOWNS, Floyd L., Jr. (1982): *Geometry,* Addison-Weslley Publishing, Inc., USA-Canada.

PUIG ADAM, Pedro (1956): *Curso de Geometría Métrica. Fundamentos,* Tomo I, 5ª Edición, Madrid.

ROUCHÉ, Eugéne et COMBEROUSSE, Ch. De (1946): *Traité de Géométrie,* Deuxième partie (Géométrie dans l'espace), Gauthier-Villars Éditeur, Paris.