Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico

M. M. Palarea Medina
M. M. Socas Robayna
Universidad de La Laguna

RESUMEN

Presentamos un estudio biográfico sobre un alumno, con los datos obtenidos con distintos instrumentos (pre y post-test, cuaderno de clase y entrevistas), que nos ofrecen información sobre los procesos cognitivos conceptuales y operaciones del alumno en el aprendizaje de las expresiones algebraicas. Este trabajo se enmarca en un amplio proyecto cuya finalidad es diseñar una Propuesta Curricular para el lenguaje algebraico, dentro de la Educación Secundaria en España. Esta Propuesta Curricular toma en consideración las habilidades cognitivas de tipo operacional y conceptual que facilitan la transición de la aritmética al álgebra, basada en cuatro fuentes de significado y en el marco de los trabajos de Duval (Semiosis-Noesis).

ABSTRACT

We present a student's biographical case study by means of the data obtained from various instruments (pre and post-test, classroom notebook and interviews). The study provides us with information about the student's conceptual and operational cognitive processes when learning algebraic expressions. This work is part of a much wider project in the design of a Curricular Proposal for algebraic language in the Spanish Secondary Education system. Our Curricular Proposal takes into account the operational and conceptual cognitive abilities that facilitate transition from arithmetics to algebra, based on the four sources of meaning and within the framework of Duval's work (Semiosis-Noesis).

Introducción

Presentamos un estudio biográfico sobre un alumno, basado en los datos obtenidos con distintos instrumentos que permiten evaluar procesos cognitivos conceptuales y operaciones del alumno en el aprendizaje de las expresiones algebraicas.

Para ello expresamos previamente algunas consideraciones de la literatura revisada y analizada. Luego hacemos algunas consideraciones del álgebra escolar y acerca de la búsqueda de significados y sistemas de representación en álgebra.

Algunas consideraciones de la literatura

Durante los últimos veinte años el interés por el estudio de las dificultades que la enseñanza/aprendizaje del álgebra escolar ha generado ha sido enorme, tanto desde la perspectiva del investigador, como de la del profesor. Pero los problemas que plantea no han sido resueltos y lo que debe ser enseñado y aprendido en álgebra, está aún por determinar, motivo por el que se ha seguido trabajando y por el que parece interesante y necesario investigar acerca de esta tarea de la adquisición del lenguaje algebraico.

Muchas son las preguntas que aún hoy no tienen respuestas; Indicamos las citadas por Kieran en el 92: ¿Qué hace que la comprensión del álgebra escolar sea una tarea difícil para la mayoría de los estudiantes? ¿Qué fuerza a muchos estudiantes a recurrir a memorizar reglas del álgebra? ¿Es el contenido del álgebra la fuente del problema? ¿Es la forma en que es enseñada lo que causa a los estudiantes no ser capaces de dar sentido a la materia? ¿Hacen los estudiantes un acercamiento a las tareas algebraicas de una manera que es inapropiada para aprender la materia en cuestión? (Kieran, 1992).

Las diferentes investigaciones tratan de buscar respuestas a éstos y otros interrogantes en torno a la naturaleza del álgebra y a los procesos de pensamiento implicados, y Kieran señala que el álgebra implica: el reconocimiento y uso de estructuras, el significado de las letras en el contexto algebraico y el cambio a una serie de convenciones diferentes a las usadas en la aritmética.

De todo lo anterior se concluye que el acercamiento procedimental (operacional), basado exclusivamente en una simple generalización de la aritmética, no parece adecuado.

Ana Sfard, 1991, también ha puesto de manifiesto que nociones abstractas de las Matemáticas, como el lenguaje algebraico, pueden ser concebidas fundamentalmente en dos formas diferentes: estructuralmente (como objetos) u operacionalmente (como procesos). La existencia de etapas históricas durante las que varios conceptos matemáticos, tales como números y función, han evolucionado desde lo operacional a lo estructural, ha llevado a Sfard a crear un modelo conceptual paralelo de tres fases: interiorización, condensación y reificación.

Mientras la interiorización y condensación son secuencias largas de cambios graduales, cuantitativos más que cualitativos, la reificación es un salto a una nueva entidad que es separada del proceso que la produce.

El análisis histórico referenciado en Sfard para las funciones, nos permite ver el desarrollo del álgebra como un ciclo de evolución operacional-estructural.

Algunas consideraciones del álgebra escolar

De un modo similar, el estudio del álgebra escolar puede ser interpretado como una serie de adaptaciones proceso-objeto, es decir, operacional-estructural, que los profesores deberían facilitar para que los alumnos pudieran llegar a comprender el aspecto estructural del álgebra.

Consideramos que los objetos del álgebra, al igual que el resto de los objetos de las Matemáticas, se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferente: el estatus operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso, y el estatus estructural, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual. Pero mientras el estatus estructural del objeto matemático se presenta organizado en diferentes redes conceptuales y es plenamente aceptado, los sistemas de representación semióticos (SRS) que caracterizan el estatus operacional (representaciones numéricas, códigos algebraicos, gráficas, diagramas, etc.) en los que los objetos del álgebra son expresados y comunicados, ha recibido menor atención por los matemáticos y en el sistema educativo; al menos eso parece deducirse de la escasez de bibliografía.

Sin embargo, las Matemáticas no pueden ser comunicadas sin estos sistemas de representación y en muchas ocasiones, los estudiantes y profesores trabajan, de manera inconsciente, con sistemas de representación intermedios (diagramas, modelos geométricos, balanza, etc.), con la intención de que ayuden al estudiante a ser competente en el sistema de representación convencional apropiado.

La búsqueda de significados y los sistemas de representación en álgebra

Parece razonable aceptar que la apropiación de un objeto matemático difícilmente puede lograrse sin reunir a diversas representaciones del mismo. La manipulación por parte de los estudiantes de representaciones matemáticas les proporciona los medios para construir imágenes mentales de un objeto matemático y la riqueza de la imagen del objeto construido dependerá de las representaciones que el sujeto haya utilizado.

Kaput, 1987, señala que cualquier SRS se ocupa al menos de cuatro fuentes de significado: traslaciones (conversiones) entre SRS formales, traslaciones (conversiones) entre SRS formales y no formales, transformaciones y operaciones dentro de un mismo SRS, sin referencia a ningún otro SRS, y consolidación a través de la construcción de objetos mentales mediante acciones, procedimientos y conceptos que se dan en los SRS intermedios, creados durante el desarrollo de la secuencia de enseñanza.

Por otra parte las investigaciones sobre la visualización en Matemáticas y el papel de las imágenes mentales, han puesto de manifiesto la importancia de las representaciones para la formación adecuada de conceptos.

Diversos investigadores, Janvier (1987), Hiebert (1988), Kaput (1987, 1991), Duval (1993, 1995), han realizado experimentos y desarrollado aspectos teóricos con la intención de aclarar los mecanismos de articulación que se dan dentro de un proceso de comprensión del conocimiento.

De todas ellos queremos señalar la tesis de Duval (1993, 1995), que realiza un trabajo teórico, coherente y unificador, semiosis (aprehensión o producción de una representación semiótica), y, noesis (articulación de varias representaciones semióticas), de los diferentes acercamientos teóricos, a las representaciones.

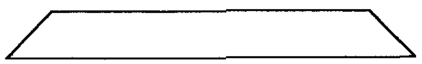
Duval, 1993, caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis: la presencia de una representación identificable, las transformaciones dentro de la representación y la conversión de una transformación a otra.

Sobre la construcción de conceptos, Duval (1993), establece que: «toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa» y por tanto: «la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva».

En general, en los procesos de enseñanza/aprendizaje del álgebra, se observa que ésta toma su significado de tres fuentes diferentes: a) El álgebra toma en parte su significado de los números y operaciones; b) Las expresiones algebraicas y las reglas de transformación también pueden referirse a situaciones reales y c) En un determinado nivel, el significado del álgebra está contenido completamente en el sistema formal.

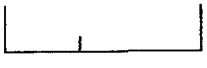
De nuestros estudios experimentales sobre lenguaje algebraico (Palarea y Socas, 1994 a, 1994 b), hemos constatado la necesidad de ampliar las fuentes de significado para el lenguaje algebraico a SRS de procedencia visual (registros geométricos) (Palarea y Socas, 1994 b), quedando determinadas las fuentes de significado para el álgebra de la siguiente forma:

Registros formales **(SRS formal algebraico)** **Números y operaciones** **(SRS formal aritmético)**



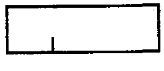
Registros geométricos **(SRS visual geométrico)** **Situaciones reales que involucran cantidades y relaciones**

Los registros geométricos hacen uso de la representación geométrica bidimensional para representación de términos y expresiones algebraicas y se propone el sistema de representación semiótico visual/geométrico (SRSVG), donde toda expresión codificada en él se puede utilizar como elaboración sintáctica y como elaboración semántica. Está basado en operaciones con magnitudes y es un sistema de representación significativo cultural, didáctica y matemáticamente. Las expresiones algebraicas, por tanto, se contextualizan en un sistema de representación geométrico donde los números y las letras son longitudes de segmentos conocidos o desconocidos, respectivamente. Las letras se consideraron como objetos geométricos o como números generalizados, con dos registros diferentes: «a» y «1.a». Así «a + b» admite el registro



a b

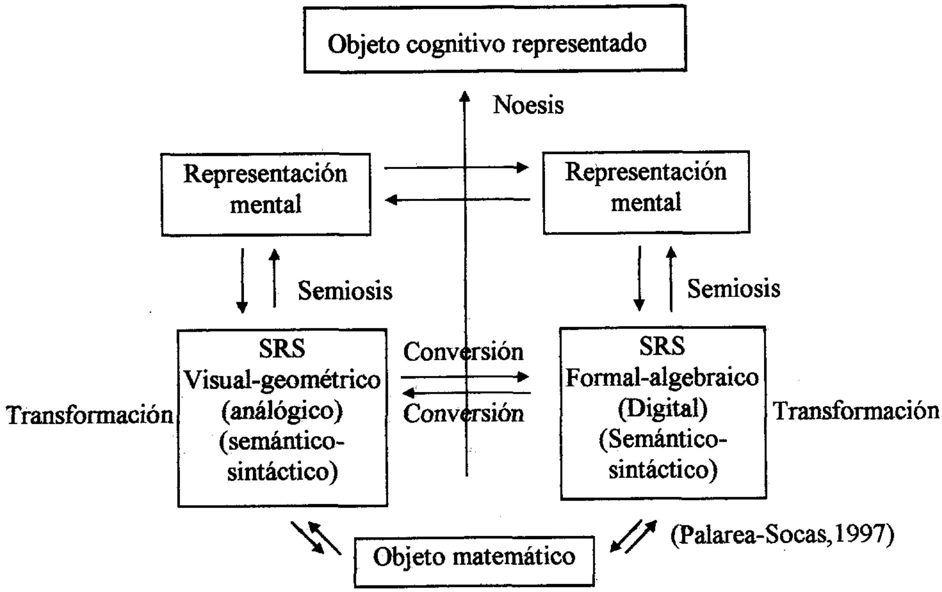
y el registro 1



a b.

El cálculo en el SRSVG se construye con las cinco propiedades características del sistema numérico: a + b = b + a ; (a + b) + c = a + (b + c); a . b = b . a ; (a . b) . c = a . (b . c); a . (b + c) = a . b + a . c.

En términos de la tesis de Duval el SRSVG interacciona con el sistema de representación Semiótico Formal Algebraico de la siguiente manera:



Este trabajo forma parte de uno de los objetivos finales de una investigación global que están realizando los autores de este artículo y no es otra que elaborar una Propuesta Curricular sobre el lenguaje algebraico para la Enseñanza Secundaria Obligatoria en España que respete estas adaptaciones operacional-estructural, ante la falta de modelos teóricos para la enseñanza/aprendizaje del álgebra, al estilo de Kieren (1988) para la construcción del número racional, o de Van Hiele (1987) para las nociones geométricas, aunque en la década de los 80 cabe destacar las adaptaciones del modelo piagetiano de las etapas de desarrollo para los conceptos del álgebra (Küchemann, 1981 y Booth, 1984).

Esta propuesta curricular considera las habilidades cognitivas básicas de carácter operacional y conceptual, para facilitar la transición de la aritmética al álgebra, apoyándose en las cuatro fuentes de significado y aceptando la tesis de Duval.

Estudio biográfico

El objetivo de este trabajo es aportar información sobre los procesos cognitivos de tipo operacional y conceptual para las expresiones algebraicas, que se dan en la transición de la aritmética al álgebra. Para ello presentamos el estudio biográfico de un caso, en el que consideramos los datos obtenidos por los diferentes instrumentos de medida y que van desde el pretest a las vídeograbaciones, pasando por el análisis del cuaderno de clase, grabaciones y postest.

Por todo ello nos ha parecido oportuno caracterizar las categorías de análisis de las habilidades cognitivas de carácter operacional (HCCO) y las habilidades cognitivas de carácter conceptual (HCCC).

Las habilidades cognitivas de carácter operacional (HCCO) consideradas son:

O.1. Realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis.

O.2. Realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis.

O.3. Hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar.

Y las habilidades de carácter conceptual (HCCC) consideradas son:

C.1. Hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal.

C.2. Contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro.

C.3. Interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual.

Método

El alumno forma parte de un grupo experimental de 31 alumnos de 12-13 años (7º de EGB, Tenerife, España). A todos los alumnos se les administró un pretest-postest, organizado en torno a 28 cuestiones relativas a las habilidades operacionales y conceptuales antes descritas. Trabajaron sobre un diseño de instrucción administrado por la propia investigadora. Se entrevistó individualmente, mediante el tipo de entrevista semi-estructurada, a nueve alumnos sobre las habilidades cognitivas ya mencionadas.

La elección de este alumno se hace en base a ser un alumno medio de la clase en cuanto a rendimiento académico y porque sus comportamientos y reacciones observables (aula, entrevista clínica) permiten comprender y explicar situaciones de interés para la investigación.

El Diseño de instrucción que se elaboró tiene como objetivo el aprendizaje por parte de los alumnos de las expresiones algebraicas, mediante la yuxtaposición de Sistemas de Representación Semióticos, el SRSVG y el SRSFormal Algebraico. O sea, uso de la yuxtaposición de registros para favorecer la adquisición del concepto.

Se materializó en dos cuadernillos que se confeccionaron previo a la instrucción y se utilizaron en un aula de la que se seleccionó el alumno del cual se realizó el estudio. Asimismo se realizaron vídeograbacioness (9 alumnos entrevistados: 3 + 6) pues se intentaba hacer un estudio de tipo cualitativo de los alumnos.

Se realizó un estudio similar con ecuaciones y también se diseñaron dos cuadernillos para ello.

Algunas tareas y resultados

Recogemos aquí, a modo de ejemplo, varias tareas relativas a los diferentes datos obtenidos por los distintos instrumentos utilizados y organizados según las categorías anteriores: O.1, O.2, O.3, C.1, C.2, y C.3.

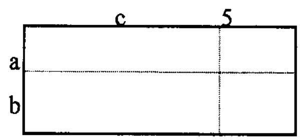
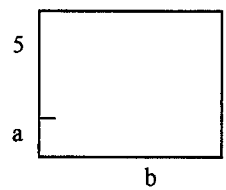
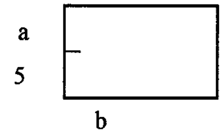
Las tareas de los alumnos para las habilidades cognitivas de carácter operacional se proponen y trabajan en un solo registro formal (semiosis) y las

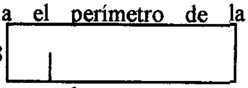
Tareas	*Resultados*
O.1 Realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis.	
a) La cuestión a + 3 a puede ser escrita de forma más simplificada como 4a. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible:	
a.1) 2 a + 5 a	*a.1) 7 a (Pe. y E); 7 a^2 (Po.).*
a.2) 2 a + 5 b	*a.2) 7ab (Pe. y Po.); 7ab, él expresa "como está" y escribe "7 a b" (E).*
a.3) 2 a + 5 b + a	*a.3) 8 a^2 b (Pe. y Po); 8 a b (E).*
a.4) a + 4 + a – 4	*a.4) No lo resolvió (Pe.); 2a^2 (Po); 5 a + 3 a = 2 a (E).*

tareas sobre las habilidades de carácter conceptual, se proponen y trabajan en dos registros (semiosis-noesis). Los resultados de las tareas seleccionadas son expresadas aquí en sus registros formales, salvo en las tareas de conversión de registros y se denotan: Pe (pretexta), Pon (postes), E (entrevista) y T (trabajo de aula).

O.2 Realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis.	
a) La cuestión a + 3 a puede ser escrita de forma más simplificada como 4a. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible: a.1) (a + b) + a a.2) (a - b) + b a.3) 3 a - (b + a) a.4) (a + b) + (a - b)	*a.1) 3 a^2 b(Pe. y Po.); 2ab+a = 3ab (E).* *a.2) No lo resolvió (Pe); 1ab^2(Po.) a b+ b=2b+a (E).* *a.3) No lo resolvió (Pe).1b (Po.); 3 a-2 a b=1 a b (E).* *a.4) No lo resolvió (Pe); 2a^2b^2 (Po.) ; 2 a b + a b = 3 a b (E).*

Tareas	*Resultados*		
O.3 Hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar.			
a) Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna:	*Pre-test*	*Post-test*	*Entrevista*
$x \rightarrow x + 4$	$x \rightarrow x + 4$	$x + 4$	$x + 4$
$6 \rightarrow$	$6 \rightarrow x + 6$	$6 + 4$	$6 + 4 = 10$
$r \rightarrow$	$r \rightarrow r + r$	$r + 4$	$r + 4$
$b + 2 \rightarrow$	$b + 2 \rightarrow$	$4 + b + 2$	$b+2+4=b+6;$
Ahora si a = 2b, ¿en qué se transforma 5 a + 3?	$10 + 3 = 13$		$5a + 3$ $5. (2b) + 3 = \boxed{10b + 3}$ $a = 2b$
b) Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna:	b*)* *Pre-test*	*Post-test*	*Entrevista*
$x \rightarrow x . 4$	$x \rightarrow x . 4$	$x . 4$	$x . 4$
$6 \rightarrow$	$6 \rightarrow 6x$	$4 . 6$	$6 . 4 = 24$
$r \rightarrow$	$r \rightarrow r^2$	$4 . r$	$6 . r = 6r$
$b + 2 \rightarrow$	$b + 2$	$4 (b + 2)$	$4 . b + 4 . 2 = 4 . b + 8$

Tareas	*Resultados*
C.1 Hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal.	
a) El producto (a + b) (c + 5) se puede escribir utilizando el área del rectángulo de lados a + b y c + 5, como:  (a + b) (c + 5) = a .c + a.5+b.c+b.5 Escribe los siguientes productos a) a . (b + 5) = b) (a + 3) (b + 2)= c) (a + b) (a + b) =	*Pre-test* *a) a . b + a . 5* *b)a.b+a.2+3.b+3.2=* *=2 a+3b+6* *c)a.a+ab+b.a+b.b=* $=a^2+ab+ ba+b^2$ $=a^2+ a b^2 + b^2$ *Entrevista* *a) a . b +a . 5* *b) a.b+ a.2+3.b+3.2* *c) a.a+a.b+b.a+b.b=* $= a^2+ab+ ba+b^2$ $= a^2 + 2 (ab)^2 +b^2$
b) Representa (a + 5).b, mediante rectángulos y utilizar un cuadro de doble entrada.	*Pre-test* b)  x | a | 5 b | b.a | b.5 *Entrevista* b) x | b a | a.b 5 | 5b 
c) Escribe las siguientes operaciones con lenguaje algebraico:	
c.1) Triplo de x.	*c.1) 3x (T, .Po y E)*
c.2. Doble de n menos 4.	*c.2) 2n - 4 (Pe,, T y E)*
c.3) Triplo de la suma de a y b.	*c.3) 3 (a + b) (T. y E)*
c.4) Doble de la diferencia entre h e i.	*c.4) 2 (h-i) (T. y E)*
c.5) Triplo del cuadrado de b.	*c.5) 3 b^2 (T. y E).*

Tareas	*Resultados*
C.2. Contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro.	
a) El chófer de un colegio hizo "n" viajes en un día, transportando 50 niños en cada viaje. ¿Cómo expresarías el número total de niños que transportó este día?. b) Calcula el área de la siguiente figura: 4  A= a 3 c) El dueño de un estanco vende 135 periódicos cada día, ¿cómo expresarías el número total de periódicos vendidos en dos semanas (14 días). d) Calcula el perímetro de la figura siguiente: 8  6 a perímetro =	a) *n = viajes* *$n \cdot 50 = x$ niños (Pe)* *b) $A = b \cdot a = 3a \cdot 4 = 12\, a^2$ (Pe)* *$A = b \cdot c = 3a \cdot 4 = 12\, a$ (Po)* c) *x = 135 periódicos* *d = 14 días* *$x \cdot d$* d) $8 + 8 + 6 + 6 + a + a = 28\, a^2$ 16 12 a^2 (Pe) d) *$8 + 8 + 6 + 6 + a + a = 16 + 12$* *$28 + 2\, a$ (E)*
C.3 Interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de expresiones algebraicas incluyendo en particular el uso del signo igual.	
Escribe de las siguientes expresiones: $n + 1$, $n + 4$, $n - 3$, n, $n - 7$, cuál es la más grande y cuál la más pequeña: Razona tu respuesta.	(Pe) *No lo resolvió* . (E):más pequeña más grande *n-7* *n+4* $n + 1$, $n + 4$, $n - 3$, n, $n - 7$ *8+1=9 8+4=12 8-3=5 8 1*

En el cuadro anterior se muestran resultados de varios ítems que se propusieron al alumno en distintas ocasiones, en algunos de los cuales respondió de diferente forma.

En las habilidades cognitivas operacionales de las categorías O.1 y O.2, se observa que la mayor dificultad de este alumno ha estado en la falta de habilidades operacionales con las letras como se observa en los ejemplos indicados, en especial en la adición.

Esto se va a traducir posteriormente en fallos en el cálculo de áreas.

Tiene asumido que el área tiene dos dimensiones y no se preocupa de dónde surgen.

Concretamente transcribimos literalmente la cuestión «a» del apartado O.1:

(A: alumno, E: entrevistadora)

A: (fijándose en el enunciado y señalando en la «a» de « a + 3a») *Aquí es como si fuera 1.*

E: *O sea, que tú crees que aquí es como si tuviera un 1 ,¿no?*

A: *Sí,* (empieza a sumar) *1 a + 3 a = 4 a; 2 a + 5 a = 7 a; 2 a + 5 b =, aquí no se podría porque no son términos semejantes, no se podría sumar.*

E: *Vale, entonces, ¿cómo te quedaría?*

A: *No se podría sumar, ¿cómo lo sumo?*

E: *¿Y qué te queda entonces?*

A: *Eso, así.* (2a + 5b)

E: *Pues así, pues ya está.*

A: *7ab.*

E: *¿Es lo mismo? Si tú crees que no se pueden sumar lo dejas como está, y si tú crees que se tiene que poner 7ab, pues...*

A: *Es que no son términos semejantes, a mí me han enseñado eso, como no son semejantes no se pueden sumar...*

E: *¿Cuál es entonces el resultado? ¿cómo mismo está?*

A: *Sí.*

E: *Pues ponlo, si tú crees que es así porque no son semejantes...*

A: *No, éste 2 a + 5 b = 7 a b.*

E: *Si tú crees...*

A: *7ab.*

E: *Pasamos al tercer ejemplo.*

A: *2 a + 5 b + a = 8* a^2 *b.*

E: *O sea, cuando tú tienes a + a es* a^2.

A: *No, a + a = 2 a.*

E: *Sigue. Este caso* (señalando al 2 a + 5 a) *y este caso* (señalando al 2 a + 5 b + a) *para ti, ¿es lo mismo?*

A: *Sí son iguales.*

E: *Son iguales, ¿no?*

A: *No, el resultado que tendríamos en éste* (señalando al 2 a + 5 b + a) *es mayor, es que a + a será 2a elevado al cuadrado.*

E: *¿Y este 2 a que tienes aquí?*

A: *Este es el que multiplica a la «a». Entonces no es al cuadrado 8ab.*

A: *a + 4 + a - 4.*

E: *Por último, ¿qué piensas?*

A: *Es que yo aquí no puedo poner 4 a porque entonces estaría multiplicando.*

E: *¿Entonces?*

A: *como no ponga... aquí tiene un 1. 5 a, no. Sería 5 a - 3 a esto es igual a 2 a.*

E: *O sea, que tú has sacado este 5 ¿de...?*

A: *Del a de la a + 4 y el 3 del 1 de la otra a menos el otro 4.*

E: *Ya.*

Continuamos transcribiendo otro ejemplo de la categoría O.2. (apartado b, ejemplo 1):

A: *(a + b) + a sería 2ab + a =*

E: *¿Por qué pones 2 a b ? ¿qué crees tú?*

A: *Aquí delante de la «a» hay un 1 y delante de la «b» hay un 1, entonces se suman los coeficientes. Se pone 2 a b + a = 3* a^2 *b.*

E: *¿Por qué* a^2*?*

A: *Porque hay 2 a.*

E: *Vale.*

Se detectan dos expresiones erróneas sistemáticamente: «2ab» considerado como resultado de «a + b» y en otros ejemplos, no manifiestos aquí por razón de espacio, «ab» como resultado de «a - b», así como la tendencia a sumar los coeficientes de todos los términos, sean o no semejantes. Sin embargo en el diálogo se ratifica en que si los términos no son semejantes, no se puede operar. Es ésta una situación muy frecuente en la enseñanza en la que el alumno posee la habilidad conceptual pero es incapaz de transformarla en una habilidad operacional.

La comprensión de la propiedad distributiva es evidente en cuanto tal, pero su poca habilidad operacional en la suma, le hace fallar en la secuencia de operaciones posterior al desarrollo de la misma.

En relación a las sustituciones (categoría O.3) muestra seguridad y siempre expresa el producto primero con un «.» y luego haciendo uso de uno de los convenios del álgebra, copia las expresiones prescindiendo de él.

La cuestión de conversión entre representaciones (categoría C.1) la supera sin problema. Conoce perfectamente las palabras-clave usadas: triple, doble, siguiente, anterior, cuadrado, producto, diferencia. En la cuestión de conversión en contextos, la solución también es correcta.

Sorprende a veces que al hacer conversiones del lenguaje habitual al lenguaje algebraico no haga bien algunas muy cercanas al contexto propio de su edad.

Al contextualizar el lenguaje algebraico (C.2) la falta de habilidad operacional con las letras, indicada anteriormente, se agudiza más cuando trata de hacer cálculos donde las letras son objetos geométricos.

La idea de producto asociada a la noción de área le lleva a expresar $3 \cdot b = 3b^2$, donde la b^2 es una expresión asociada al área como producto de dos dimensiones. El hecho se repite en los cálculos de los perímetros, donde a pesar de comprobarse que tiene clara la noción de perímetro, falla en las operaciones que aparecen en el cálculo del mismo cuando se trata de una figura (rectángulo o no) que tiene la dimensión de algunos de sus lados dividida, haciendo operaciones no lícitas como «2 + x» por «*2x*» y «3 + y» por «*3y*».

Su habilidad conceptual relativa al área y perímetro se ha visto enriquecida con un cambio de actuación en sentido de no asignar al área o perímetro unidades de medida no explícitas en las dimensiones de las figuras.

Refiriéndonos a la interpretación y comprensión del significado de los signos, las letras y las expresiones algebraicas (C.3) en la cuestión expuesta en el cuadro, de gran dificultad en gran parte del alumnado, este estudiante razona muy bien y lo hace correctamente desde el comienzo, sin dar ningún valor numérico a «n» y, luego da a «n» el valor 8. Transcribimos su entrevista:

E: *¿Cuántas expresiones hay?*

A: *Cinco.*

E: *Vale, ¿cuál es la parte más grande y la más pequeña?*

A: *No sé, esto puede ser por ejemplo n-3, esto puede ser más pequeño que éste porque esto puede ser 400 y esto puede ser un 2 a lo mejor.*

E: *Sí, pero ¿puede ser en el mismo ejercicio?, ¿ la «n» puede tener distintos valores?*

A: *Tendría que tener el mismo, digo yo.*

E: *Y, ¿por qué dices tú, entonces, que es 400..y no ese número?, ¿te das cuenta de lo que estás diciendo, o sea, como si fuese..., tú has dicho no, como si fuesen menos ¿no?*

A: *Yo lo que haría será darle un valor a la «n», un valor que me parezca para todas las expresiones y hacerlo así.*

E: *Bueno, a ver.*

A: *Lo puedo poner aquí, ¿no?*

E: *Sí, donde tú quieras. ¿No se puede ver si no le damos un valor...?, ¿ si no le damos un valor, no se puede ver?*

A: *A «n» el 8, 8 + 1 = 9, 8 + 4 = 12, 8 - 3 = 5, 8, 1, el más pequeño me parece que es n-7 y el más grande n+4.*

E: *Tú fíjate a ver si esto tiene...intenta olvidar lo del 8 a ver si tiene algún sentido eso... a ver si tú ves por qué tiene que ser la más pequeña o por qué la más grande..*

A: *Uh...*

Entiende que al sumar un número mayor a un número dado, el resultado es siempre mayor y por el contrario al restar un número mayor a uno dado, el valor de la expresión resultante es siempre, menor.

Conclusiones

Entre las conclusiones más significativas, a modo de síntesis, cabe señalar:

Que la conversión directa de situaciones reales que involucran cantidades y relaciones en contextos diferentes, no parece presentar dificultades, al conocer el alumno las palabras clave que permiten hacer esa conversión: triple, doble, siguiente, anterior, cuadrado, producto, diferencia, etc.

Que la conversión entre el Sistema de Representación Semiótico Visual Geométrico y el Sistema de Representación Formal Algebraico presenta dificultades tanto en el contexto de área como de perímetro, sobre todo cuando algunas de las dimensiones están subdivididas.

Las habilidades operacionales presentan una mayor conflictividad en las operaciones aditivas. En el cálculo de perímetros, aún teniendo clara la noción de perímetro, falla en las operaciones que aparecen en el cálculo del mismo. Este error es más frecuente cuando alguna de las dimensiones de la figura está subdividida (Küchemann, 1981; Chalouh y Herscovics, 1988).

En relación a las cuestiones multiplicativas y en particular a la propiedad distributiva, manifiesta seguridad en la misma, tanto por la izquierda como por la derecha, sin que las situaciones aditivas que se dan, generen dificultades.

Parece sorprender la escasa habilidad operativa aditiva, aún conociendo la regla: «si los términos no son semejantes, no se pueden operar», situación muy frecuente en la enseñanza, donde el alumno parece poseer el conocimiento conceptual pero es incapaz de transformarlo en una habilidad operacional. Situación descrita por Booth (1984), como que «la habilidad para describir un método verbalmente, no supone necesariamente la habilidad para reconocer la correcta simbolización de este método».

En ocasiones existen reglas fijas que predominan sobre el conocimiento conceptual. A pesar de haber incorporado conocimiento conceptual del nuevo registro, las habilidades operacionales subyacentes (SRS formal aritmético) le hacen producir errores por falta de significado en el nuevo registro. Estas ausencias de significado no se suplen con transformaciones en el SRS formal algebraico (Semiosis) sino que se adquieren en los procesos de Noesis.

Este alumno presenta una articulación adecuada entre el SRS visual geométrico y el SRS formal algebraico cuando se refiere a las cuestiones multiplicativas y en particular a la propiedad distributiva, pero ese esquema mental le lleva a cometer errores en contextos aditivos, por la necesidad de expresar las letras como potencias al cuadrado, expresión asociada a la noción de área.

Con los datos obtenidos, podemos señalar que el modelo propuesto se revela como un buen método para profundizar en el análisis cualitativo de las dificultades, obstáculos y errores, que se originan en la transición de la aritmética al álgebra.

Referencias bibliográficas

BOOTH, L. (1984): *Algebra: Children's Strategies and Errors.* NFER-Nelson, Windsor.

CHALOUH, L. & HERSCOVICS, N. (1988): «Teaching algebraic expressions in a meaningful way» in A. E. COXFORD, ed.: *The ideas of algebra K-12.* Reston, VA: National Council of Teachers Mathematics, 33-42.

DUVAL, R. (1993): «Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée», *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* IREM de Strasbourg. (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, IPN, México 1997).

– (1995): *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Peter Lang, Suisse.

KAPUT, J. (1987): «Representation Systems and Mathematics» in C. JANVIER, ed.: *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates.

– (1991): «Notations and representations as mediators of Constructive Processes» in VON GLASERSFELD E., ed.: *Radical Constructivism in Mathematics Education.* Kluwer Academic Publisher.

KIERAN, C. (1992): «The Learning and Teaching of School Algebra» in GROWS, D.A., ed.: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Macmillan Publishing Company, New York.

KIEREN, T. (1988): «Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Developments», in J. HIEBERT y M. BEHR, ed.: *Number Concepts and Operations in* *the Middle Grades.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers/National Council of Teachers of Mathematics: Hillsdale, NJ/Reston.

KÜCHEMANN, D. (1981): «Algebra» in HART, K., ed.: *Children's Understanding of Mathematics.* Murray, London, 11-16.

PALAREA, M. M., y SOCAS, M. M. (1994 a): «Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico», *Suma* 16, 91-98.

– (1994 b): «Élaborations sémantiques vs élaborations syntactiques dans l'enseignement-apprentissage de l'algèbre scolaire (12-16 ans)», Toulouse, France, *Actes de la 46ème Rencontre de la CIEAEM* II, 111-119.

– (1997): «Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar», Uno 14, 7-24.

SFARD, A. (1991): «On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin», *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

SFARD, A. & LINCHEVSKI, L. (1994): «The gains and the pitfables of reification. The case of Algebra», *Educational Studies Mathematics* 26, 191-228.