Estudio exploratorio sobre problemas de combinación de estados

Alicia Bruno y Antonio Martinón
Universidad de La Laguna

RESUMEN

Presentamos los resultados de un estudio exploratorio, realizado con alumnos de 11-13 años de edad, sobre problemas aditivos de combinación de estados, que son aquellos en los que hay dos estados parciales cuya suma es el estado total. Todos los problemas propuestos se refieren a saldos dinerarios (positivos o negativos) o a deudas dinerarias mutuas, y el análisis que se ha hecho considera las variables siguientes: signos de los números, posición de la incógnita y formato de la pregunta. Los resultados muestran que los problemas con más bajo porcentaje de acierto por parte de los alumnos son aquellos en los que los saldos parciales tienen signos distintos y la incógnita es uno de ellos.

ABSTRACT

We present the results of an exploratory study developed with 11-13 year old students, about «combination of states» additive problems. Combination of states additive problems are those with two partial states where the addition is the total state. Every problem proposed is referred to money balance (positive and negative) or to reciprocal money debt. The analysis considers the following variables: signs of the numbers, position of the unknown and format of the question. The results show that the problems with the lowess percentage of success are those where the partial balances have different signs and the unknown is one of them.

1. Introducción

El estudio de los problemas aritméticos ha sido un campo de intensa investigación en Didáctica de las Matemáticas y, aunque el interés por el tema es antiguo, continúa manteniendo su vigencia. La principal atención se ha centrado en los problemas aditivos con números positivos, mientras que los problemas aditivos en los que intervienen números negativos y los problemas de multiplicación y división han sido menos estudiados. Puede encontrarse una amplia bibliografía sobre el tema en dos trabajos que han expuesto los principales resultados de la investigación sobre resolución de problemas aritméticos: Fuson, (1992) y De Corte y Verschaffel (1996), en donde se recogen trabajos de los principales autores que han trabajado sobre el tema.

Aunque la resolución de problemas en los que intervienen números negativos ha recibido menos atención, también podemos encontrar interesantes trabajos que muestran las peculiaridades de los problemas aditivos cuando se utilizan dichos números (Bell, 1986; Vergnaud, 1982; Vergnaud y Durand, 1976; Marthe, 1979; Conne, 1985).

También en España ha recibido atención la investigación didáctica sobre estos problemas. En el libro de Puig y Cerdán (1988) se hace una recopilación de las investigaciones conocidas en aquel momento y en Castro et al. (1992) se presentan las diferentes líneas que han guiado las investigaciones sobre los problemas aritméticos, así como las diferentes clasificaciones de los problemas aritméticos habidas hasta esa fecha.

En la Universidad de La Laguna se han realizado varios trabajos que han culminado en tesis doctorales sobre los problemas aritméticos verbales con números positivos, en las que se han analizados dificultades de los problemas en función, entre otros aspectos, del formato de presentación del problema, la estructura y los esquemas específicos para cada tipo de problema (Bethencourt, 1986) y en las que se han estudiado el aprendizaje de los problemas yuxtaponiendo varios sistemas de representación (Hernández, 1997).

Por nuestra parte, nos hemos centrado en los problemas aditivos con números negativos desde distintas perspectivas: por un lado, la dificultad de los problemas según su estructura, la posición de la incógnita, los contextos, y por otro el papel de la recta en el aprendizaje de estos problemas (Bruno y Martinón, 1994a, 1994b, 1997a; Bruno, 1997).

El estudio que aquí presentamos se sitúa en el marco de nuestras investigaciones sobre los problemas aditivos, especialmente las dirigidas a la utilización de los problemas en la enseñanza y aprendizaje de los números.

Por un problema aditivo simple entendemos un problema de suma o de resta, con números positivos o negativos, en el que intervienen tres números, siendo dos de ellos los datos y el tercero la incógnita. Nuestro interés se centra en los denominados problemas de enunciado verbal, que son aquellos en los que hay una «historia».

Las «historias» aditivas simples de combinación de estados son situaciones que se describen con una adición:

$$a + b = e \ ,$$

en la que se representan dos estados parciales (*a* y *b*) y un estado total (*e*). Por ejemplo, a representa un saldo («debo 2 pta a la caja de ahorros»), b otro saldo («tengo 5 pta en el banco») y e el saldo total («tengo 3 pta en total»). Hay varios tipos de estos problemas, según los signos de a,b,e, la incógnita, la forma de expresar los estados y el formato de la pregunta.

Presentamos un estudio exploratorio sobre problemas de combinación de estados realizado con alumnos de 6º, 7º y 8º de la Enseñanza General Básica (EGB) y 1º del Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP). Los resultados obtenidos permiten afirmar que todas las variables que hemos considerado influyen en los porcentajes de éxito.

2. Situaciones aditivas

En todo problema aditivo de enunciado verbal hay una «historia» en la que se describe una situación en la que intervienen varias cantidades de una misma magnitud, lo que denominamos situaciones aditivas. Describimos ahora algunos aspectos de una situación aditiva que tienen influencia en el nivel de dificultad que para los alumnos presenta la resolución de un problema.

2.1. *Estructura funcional*

Una primera clasificación de las situaciones aditivas se obtiene atendiendo a la estructura funcional. Todos los problemas que consideramos en el presente estudio tienen la misma estructura funcional, la de combinación de estados.

Combinación de estados. En estas situaciones hay dos estados parciales *a* y *b* y un estado total *e* que es suma de los dos parciales; diremos que su esquema funcional es:

$$a + b = e$$

Ejemplo: Juan debe 5 pesetas a la caja de ahorros y tiene 3 pesetas en el banco; en total Juan debe 2 pesetas.

En la literatura de han descrito hasta once estructuras funcionales diferentes (Bruno y Martinón, 1997b). Además de la de combinación de estados, los alumnos están familiarizados con las dos siguientes estructuras funcionales.

Variación de un estado. En estas situaciones hay un estado inicial e_i, con el transcurso del tiempo se produce una variación v y finalmente se alcanza el estado final e_f, de modo que se tiene el esquema funcional

$$e_i + v = e_f$$

Ejemplo: Esta mañana Juan debía 5 pesetas y a lo largo del día ha ganado 3 pesetas; ahora debe 2 pesetas.

Comparación de estados. Están presentes dos estados, el menor e y el mayor d, y se comparan de forma absoluta, siendo la comparación $c = d - e$. El esquema funcional es:

$$e + c = d$$

Ejemplo: Juan debe 5 pesetas y Pedro tiene 2 pesetas; Pedro tiene 3 pesetas más que Juan.

En las situaciones de combinación de estados los dos estados parciales juegan un papel similar. Es decir, si $x + y = z$ es el esquema funcional de una determinada estructura funcional, en general los sumandos x e y desempeñan un distinto papel, tal como se ve en la variación de un estado ($x = e_i$, $y = v$) o en la comparación de estados ($x = e$, $y = c$), mientras que en la combinación de estados no resultan distinguibles x e y.

2.2. *Contextos*

En este estudio consideramos dos contextos para las situaciones aditivas de combinación de estados, los cuales ahora describimos brevemente.

Saldos dinerarios. Los estados parciales son el saldo en la caja de ahorros y el saldo en el banco, mientras que el estado total es el saldo total, suma de los dos parciales. Ejemplo: Juan debe 5 pesetas a la caja de ahorros y tiene 3 pesetas en el banco; en total debe 2 pesetas.

Deudas dinerarias mutuas. Hay dos personas (Juan y Pedro) de modo que cada una de ellas debe dinero a la otra (estados parciales), pudiendo saldarse ambas deudas en una única (estado total). Ejemplo: Juan debe 5 pesetas a Pedro y Pedro debe 3 pesetas a Juan; en total Juan debe 2 pesetas a Pedro.

2.3. *Formas semánticas según el contexto*

Se han contemplado en este trabajo diversas formas de expresar los estados parciales y el estado total. En el caso de los saldos dinerarios, hemos usado dos formas:

> *d = directa.* Se dice directamente el saldo de la persona, lo que tiene o lo que debe: Juan tiene 2 pesetas en el banco.
>
> *i = indirecta.* Se expresa el saldo de la persona invirtiendo la expresión: si Juan tiene 2 pesetas en el banco se dice que el banco debe 2 pesetas a Juan.

En el caso del contexto de deudas dinerarias mutuas sólo se ha usado la siguiente forma:

> *s = simétrica.* Juan debe 5 pesetas a Pedro y Pedro debe 3 pesetas a Juan.

2.4. *Signos de los números*

En general hay seis posibilidades diferentes en los signos de los números correspondientes a una esquema funcional $x + y = z$, según sean positivos o negativos los números x, y, z. Teniendo en cuenta que en las situaciones aditivas de combinación de estados, las únicas que consideramos en este trabajo, los estados parciales desempeñan un papel simétrico, sólo consideramos cuatro posibilidades de signos de los números, tal como se señala a continuación:

> *ppp*: los dos estados parciales son positivos y, por tanto, el estado total también es positivo.
>
> *pnp* (= *npp*): un estado parcial es positivo y el otro es negativo, siendo el estado total positivo.

npn (= *pnn*): un estado parcial es positivo y el otro es negativo, siendo el estado total negativo.

nnn: los dos estados parciales son negativos y, por tanto, el estado total también es negativo.

3. Problemas aditivos

Ya hemos indicado que en cada problema aditivo está presente una situación o «historia» aditiva. Las situaciones aditivas que hemos considerado en este estudio las hemos clasificado atendiendo a su estructura funcional, al signo de los números, al contexto y a la forma semántica. Por tanto, en los problemas que consideramos prestaremos atención a esos aspectos, pero también consideraremos otros que ahora se detallan.

3.1. *Posición de la incógnita*

Con carácter general, cada historia aditiva da lugar a tres problemas diferentes, según cuál sea la incógnita. Si el esquema funcional de una historia es

$$x + y = z\ ,$$

la incógnita puede ser cualquiera de los tres números que intervienen (x, y, z). Diremos que se trata de un problema de *incógnita 1* (*U1*) si la incógnita es x, de *incógnita 2* (*U2*) si es y, de *incógnita 3* (*U3*) si es z.

En los problemas de combinación de estados, sin embargo, el papel simétrico que juegan los dos estados parciales nos obliga a distinguir según sean los signos de los números, tal como ahora detallamos.

Casos ppp y nnn (todos los estados tienen el mismo signo). Identificamos los problemas de incógnitas 1 (U1) y 2 (U2) y hablaremos de problemas U12. De esta forma, teniendo en cuenta los signos de los números y la posición de la incógnita, consideraremos los problemas

ppp12, ppp3, nnn12, nnn3.

Casos pnp y *npn* (los estados parciales tienen signos distintos). En estos casos consideramos las tres posibles posiciones de las incógnitas, de modo que consideraremos los problemas siguientes:

pnp1, pnp2, pnp3, npn1, npn2, npn3.

Es decir, tenemos los siguientes tipos de problemas de combinación de estados según la posición de la incógnita:

U12: todos los estados son del mismo signo, la incógnita es uno de los dos estados parciales, siendo los datos el otro estado parcial y el estado total.

U1: los estados parciales tienen signos distintos, la incógnita es el estado parcial que tiene el mismo signo que el estado total y los datos son el otro estado parcial y el estado total.

U2: los estados parciales tienen signos distintos, la incógnita es el estado parcial que tiene signo distinto que el estado total y los datos son el otro estado parcial y el estado total.

U3: la incógnita es el estado total, siendo los datos los dos estados parciales.

3.2. *Formato de la pregunta*

Hemos contemplado cuatro formas distintas de hacer la pregunta relativa a la incógnita. Con el fin de ilustrar la explicación consideremos el siguiente ejemplo: La situación económica total de Inés es que tiene 2.000 pesetas. Tiene 6000 pesetas en el banco. Se trata de preguntar por el saldo de Inés en la caja de ahorros.

e = pregunta abierta. Se pregunta por cuál es la situación económica en la caja de ahorros, en el banco o en total. Ejemplo: ¿cuál es su situación económica en la caja de ahorros?

v = pregunta verdad. Se pregunta por cuánto tiene o cuánto debe si efectivamente el saldo dinerario permite hablar de «tiene» o «debe». Ejemplo: ¿cuánto dinero debe a la caja de ahorros?

m = pregunta mentira. Se pregunta por cuánto tiene cuando realmente debe, aunque no se usó nunca el preguntar por cuánto debe cuando realmente tiene. Ejemplo: ¿cuánto dinero tiene en la caja de ahorros?

r = pregunta de elección. Se ofrecen cuatro posibilidades para elegir una. Los números que figuran en las cuatro posibilidades son $\pm u \pm v$, siendo u y v los datos. Ejemplo: ¿cuál es su situación económica en la caja de ahorros?

Inés tiene 8.000 pesetas en la caja de ahorros
Inés debe 8.000 pesetas a la caja de ahorros
Inés tiene 4.000 pesetas en la caja de ahorros
Inés debe 4.000 pesetas a la caja de ahorros

3.3. *Tipos de problemas en este estudio*

Los diferentes aspectos considerados hasta ahora nos permiten contemplar distintos *tipos de problemas* de combinación de estados. Con el fin de poder referirnos a un cierto tipo de problema haremos uso de una notación que se refiere a los aspectos que hemos considerado.

Si nos fijamos en los aspectos matemáticos hemos de tener en cuenta los signos de los números (*ppp*, *pnp*, *npn*, *nnn*) y la posición de la incógnita (U12, U1, U2, U3). En lo que se refiere a los aspectos no matemáticos hemos de prestar atención a la forma semántica según el contexto (directa e indirecta en los saldos dinerarios; simétrica en las deudas dinerarias mutuas) y a la forma de preguntar (abierta, verdad, mentira, elección).

Por ejemplo, un problemas del tipo *pnp2dm* es un problema en el que hay un estado parcial positivo, el otro es negativo y el estado total es positivo (*pnp*), la incógnita es el estado parcial negativo (U2), se usa la forma directa de expresión (*d*) y la pregunta adopta la forma de pregunta mentira (*m*). Ejemplo: *La situación económica total de Inés es que tiene 2000 pesetas. Si tiene 6000 pesetas en el banco, ¿cuánto dinero tiene en la caja de ahorros?*

En la Tabla 1 se indican con un (*) los 45 tipos de problemas propuestos a los alumnos en el estudio que aquí estamos presentando.

TABLA 1
LOS 45 TIPOS DE PROBLEMAS PROPUESTOS A LOS ALUMNOS (*)

		e	v	m	r			e	v	m	r
	d	*	*		*		d	*	*		*
ppp12	i	*				nnn12	i				
	s						s				
	d	*	*		*		d	*	*		*
ppp3	i				*	nnn3	i				
	s						s				
	d	*	*	*	*		d	*	*	*	*
pnp1	i				*	npn1	i	*			
	s						s				*
	d	*	*	*	*		d	*	*	*	*
pnp2	i	*				npn2	i				
	s				*		s				
	d	*	*		*		d	*	*	*	*
pnp3	i	*				npn3	i	*			
	s						s				*

4. El estudio

El estudio se realizó con varios grupos de alumnos de 6º, 7º, 8º y 1º de BUP, tal como se indica en la Tabla 2.

TABLA 2
NÚMERO DE ALUMNOS

Nivel	Edad	Número
6º EGB	11-12	54
7º EGB	12-13	46
8º EGB	13-14	24
1º BUP	14-15	54

A los alumnos se les pasaron diversas pruebas. En total se confeccionaron 9 pruebas, tres de cada uno de los siguientes tipos:

E: todas las preguntas en formato *e*
R: todas las preguntas en formato *r*
X: todas las preguntas en formatos *v* o *m*

Cada prueba contenía 5 problemas. Cada problema sólo aparece en una única prueba. Los 45 problemas que en total fueron propuestos (5 en cada una de las 9 pruebas), pueden agruparse según las formas semánticas y los contextos de la siguiente manera:

35 forma *d* (saldos)
7 forma *i* (saldos)
3 forma *s* (deudas mutuas)

En todas las pruebas, el primer problema es U3, ya que son los más familiares para los alumnos y los problemas s figuraban en cuarto lugar. Cada problema fue respondido por entre 18 y 21 alumnos de los cuatro niveles:

6 de 6º EGB
4-6 de 7º EGB
2-3 de 8º EGB
6 de 1º BUP

Por último, téngase en cuenta que los problemas planteados pueden ser resueltos tanto con números positivos como con números negativos. De los alumnos participantes en nuestra experiencia los de 6º EGB no habían tratado los números negativos, por lo que se esperaba que resolviesen los problemas utilizando números positivos e interpretando si el resultado era o no una deuda.

5. Resultados

Presentamos en la tabla 3 los porcentajes de acierto en los 45 problemas del estudio y en la tabla 4 los porcentajes de acierto correspondientes a los problemas de forma directa *d*, ordenados de menor a mayor.

Los resultados los estudiamos en función de las variables ya comentadas: posición de la incógnita, signos de los números, formato de la pregunta y forma semántica del contexto dinerario. Con el fin de facilitar la lectura introducimos la siguiente notación: si escribimos

$$pnp12 < ppp3$$

con ello queremos significar que el problema *pnp12* tiene menor porcentaje de éxito que el *ppp3*.

5.1. *Posición de la incógnita*

Un primer resultado es que los problemas de incógnita 1 y 2 son más difíciles que los de incógnita 3, obteniendo así resultados similares a los de otras investigaciones (Vergnaud, 1982, Conne, 1986, Bruno y Martinón, 1997a). Esto se ve claro en los siguientes datos, en los que se indican los intervalos en los que se sitúan los porcentajes de acierto de los problemas según las incógnitas (ver tabla 3):

U1	0% - 16%
U2	5% - 47%
U12	24% - 74%
U3	42% - 95%

Fijados el formato de la pregunta y la forma semántica, se tienen los siguientes resultados:

$$ppp12 < ppp3$$
$$nnn12 < nnn3$$
$$pnp1 < pnp2 < pnp3$$
$$npn1 < npn2 < npn3$$

Así pues, con independencia de los signos de los números, de los formatos de las preguntas y de las formas semánticas, se observa que los problemas de incógnita 3 tienen casi siempre resultados altos, los de incógnita 12 tiene resultados medios y los de incógnitas 1 ó 2 tienen resultados bajos. La observación de la tabla 4 pone de manifiesto con mayor claridad que

$$U1 < U2 < U12 < U3$$

TABLA 3

PORCENTAJE DE ACIERTO EN CADA PROBLEMA

		e	v	m	r			e	v	m	r
ppp12	d	38	74		58	nnn12	d	33	68		53
	i	24					i				
	s						s				
ppp3	d	81	95		85	nnn3	d	43	85		80
	i				74		i				
	s						s				
pnp1	d	5	15	16	5	npn1	d	5	0	5	5
	i				11		i	10			
	s						s				15
pnp2	d	10	47	5	22	npn2	d	14	32	32	17
	i	29					i				
	s				33		s				
pnp3	d	95	89		67	npn3	d	57	74	42	67
	i	67					i	57			
	s						s				79

TABLA 4
PORCENTAJE DE ACIERTO EN LOS PROBLEMAS *d*

dv		de		dr		dm	
npn1	0	npn1	5	npn1	5	npn1	5
pnp1	15	pnp1	5	pnp1	5	pnp2	5
npn2	32	pnp2	10	npn2	17	pnp1	16
pnp2	47	npn2	14	pnp2	22	npn2	32
nnn12	68	nnn12	33	nnn12	53		
ppp12	74	ppp12	38	ppp12	58		
npn3	74	nnn3	43	npn3	67	npn3	42
nnn3	85	npn3	57	pnp3	67		
pnp3	89	ppp3	81	nnn3	80		
ppp3	95	pnp3	95	ppp3	85		

5.2. *Signos de los números*

Centrándonos ahora en los signos de los números, podemos también ver una clara influencia de los mismos en el éxito de la resolución del problema, tal y como señaló Marthe (1979).

En este trabajo hemos obtenido lo siguiente: si fijamos las incógnitas, los problemas más fáciles de resolver según el tipo de signo son los *ppp*, seguidos de los *nnn*, mientras que los más difíciles son los problemas *pnp* y *npn*. Podemos escribir:

U1: npn < pnp
U2: pnp >< npn
U12: nnn < ppp
U3: nnn < ppp , npn < pnp

donde hemos querido indicar con el símbolo >< que no hay orden claro. Si nos fijamos en la tabla 4 podemos escribir lo siguiente:

npn1								
npn2		*nnn1*		*ppp1*		*npn3*		*nnn3*
	<		<		<		<	
pnp1		*nnn2*		*ppp2*		*pnp3*		*ppp3*
pnp2								

A falta de realizar un estudio más profundo, parece que los problemas con signos iguales son más fáciles que los problemas con signos distintos. Esto puede ser debido a varias causas, siendo una de ellas que en los problemas con signo distinto no sólo hay que elegir la operación adecuada, sino que además es necesario discutir el signo del resultado, cuestión que parece más clara en los problemas con el mismo signo. Marthe (1979) encontró resultados similares en los problemas con estructura combinación de variaciones sucesivas ($v + v = v$), afirmando que los problemas con signos distintos son más difíciles para los alumnos que los de igual signo.

5.3. *Formatos de las preguntas*

Si realizamos la comparación de los problemas en los formatos verdad (v), respuesta múltiple (r) y de respuesta abierta (e) vemos que, en general,

$$e < r < v \, ,$$

habiendo una excepción con el problema *pnp3* en el que el formato e tiene porcentaje más alto que el formato v.

En lo que se refiere a los formato verdad y mentira, sorprende que en algunos problemas no hay diferencias apreciables entre unos y otros. Es decir, que los alumnos ignoran la palabra «mentira» de su enunciado e interpretan correctamente el resultado. En los casos en que se observan diferencias, siempre son a favor del formato verdad, como los problemas *pnp2* y *npn3*.

Por último, llamamos la atención a cómo el formato e en ocasiones resultó muy difícil para los alumnos. Así, en el problema *nnn3* se tuvo el 43% de éxito para el formato e frente al 85% del formato v y el 80% del r. Ello puede deberse a que este formato, al dejar la respuesta abierta, no sólo contiene las dificultades propias del problema en cuanto al tipo de incógnita y a los signos, sino que se añaden las equivocaciones en los cálculos.

Con todo ello, parece un hecho claro que la manera en que redactamos los problemas, y la forma en que cuestionamos a los alumnos influye fuertemente en la resolución de dichos problemas. Este hecho, ya comprobado con los números positivos, lo podemos extender a los problemas con números negativos.

5.4. *Forma semántica según el contexto*

Estudiamos en este apartado la comparación de la forma semántica simétrica y de las formas directa e indirecta.

Realizando la comparación de los tres problemas simétricos planteados (siempre en formato *r*) con los problemas de formato directo (los únicos con los que es posible la comparación) vemos que la forma simétrica es más fácil para los alumnos, debido, quizás a que es un lenguaje más usual que el de la forma directa.

TABLA 5

PORCENTAJES DE ÉXITO EN LAS FORMAS *s* Y *d*

	s	*d*
pnp2	33	22
pnp1	15	5
npn3	79	67

Más aún, en los 6 problemas *pnp2*, el segundo mejor resultado que se obtiene es el de la forma semántica simétrica, y en los 6 problemas *npn1* y en los 6 problemas *npn3* los mejores resultados son los de la forma simétrica. Es una prueba más de cómo la forma de expresar las situaciones influye en la comprensión del problema por parte del alumno.

En cuanto a la forma directa e indirecta: no hay regularidades en las respuestas. De los siete problemas en los que podemos comparar las formas directa e indirecta, se muestra más fácil la forma directa en tres de ellos, en otros tres es más fácil la indirecta y en el otro aparecen porcentajes iguales. Por consiguiente, estas dos formas de expresión de los problemas no parecen que sean significativas o que influyan especialmente en la dificultad de los problemas.

6 Conclusiones

En un problema aritmético de enunciado verbal confluyen muchos factores que hacen que sean más o menos difíciles para los alumnos y que les llevan a seguir diferentes procedimientos de resolución.

En las investigaciones sobre problemas con números positivos se ha avanzado considerablemente, y a partir de los resultados de la investigación se han diseñado métodos de enseñanza más adecuados.

Sin embargo, la investigación sobre los problemas que implican el uso de números negativos está menos avanzada. En trabajos previos se ha estudiado su dificultad según distintas variables: estructura de los problemas, contexto, posición de la incógnita y signos de los números. En este trabajo hemos profundizado en las dos últimas variables citadas, añadiendo nuevos elementos de estudio, centrados en la forma de redactar los problemas. En definitiva, hemos fijado el contexto y la estructura de los problemas para detenernos en las siguientes variables: signos de los números, posición de la incógnita, formato de la pregunta y forma semántica. Son estos dos últimos aspectos los novedosos en comparación con otros trabajos.

Con respecto a las variables posición de la incógnita y signos de los números nuestros resultados son coherentes con los ya existentes en la literatura sobre el tema. En este sentido se hace necesario crear ayudas para la enseñanza que faciliten la comprensión de los problemas que presentan mayores dificultades, tal y como se ha hecho con números positivos (ver De Corte y Verschaffel, 1996) creando situaciones de aprendizaje adecuadas a través de esquemas, representaciones gráficas, estudio de las estructuras de los problemas por parte de los alumnos, etc.

Una de las principales conclusiones de este trabajo, es que en los problemas de combinación de estados la posición de la incógnita es el factor más influyente en la dificultad de los mismos, y en menor medida las otras variables analizadas, si bien también tienen su importancia.

Hemos encontrado a través de las respuestas de los alumnos que tanto el formato de presentación de los problemas como la forma semántica son factores que influyen también en el éxito de los mismos. Especialmente los alumnos de menos edad no comprenden bien los enunciados de los problemas, no imaginan lo que realmente significa la situación que se describe. Es importante tener en cuenta cómo redactamos los problemas, porque ello repercute directamente en lo que responden los alumnos. Errores que a veces atribuimos a la naturaleza abstracta de las matemáticas o a la estructura de los problemas, pueden estar ocasionados por una falta de comprensión del lenguaje con que están redactados los problemas, lo que lleva a algunos alumnos a plantear las operaciones sin realmente saber por qué son las adecuadas.

Bibliografía

BELL, A. (1986): «Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros», *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), 199-20.

BETHENCOURT, J. T. (1986): *Estrategias cognitivas en la resolución de problemas aritméticos*. Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna.

BRUNO, A. (1997): *La enseñza de los números negativos desde una perspectiva unitaria*. Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna.

BRUNO, A.; MARTINÓN, A. (1994a): «Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos», *Suma*, 16, 9-18.

– (1994b): «La recta en el aprendizaje de los números negativos», *Suma*, 18, 39-48.

– (1997a): «Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos», *Enseñanza de las Ciencias*, 15 (2), 249-258.

– (1997b): «Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos», *Educación Matemática*, 14, 1.

CASTRO, E.; RICO, L.; GIL, F. (1992): «Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos», *Enseñanza de las Ciencias*, 10 (3), 243-253.

CONNE, F. (1985): «Calculs numériques et calculs relationnels dans la resolution de problèmes d'arithmetique», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 5 (3) 269-332.

DE CORTE, E.; VERSCHAFFEL, L. (1996): «Number and arithmetic», en BISHOP et al. (eds.): *International Handbook of Mathematics Education*, 99-137. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

FUSON, K. (1992): «Research on whole number addition and subtraction», en GROWS, D. (ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company, New York.

HERNÁNDEZ, J. (1997): *Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos*. Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna.

MARTHE, P. (1979): «Additive problems and directed numbers», *Proceedings of the III PME*, 153-157, Warwick.

PUIG, L.; CERDÁN, F. (1988): *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis, Madrid.

VERGNAUD, G. (1982): «A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems», en CARPENTER, T.; MOSER, J.; ROMBERG, T. (eds.): *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. LEA, New Jersey.

VERGNAUD, G.; DURAND, C. (1976): «Structures additives et complexité psychogénétique», *La Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.

Anexo. Relación de problemas (en formato *dv*)

ppp12dv. La situación económica total de Diego es que tiene 6.000 ptas. Si en el banco tiene 2.000 ptas., ¿cuánto dinero tiene en la caja?

ppp3dv. Juan tiene 2.000 ptas. en el banco y tiene 3.000 ptas. en la caja. ¿Cuánto dinero tiene en total?

pnp1dv. La situación económica total de Ana es que tiene 1.000 ptas. Si debe 4.000 ptas. a la caja, ¿cuánto dinero tiene en el banco?

pnp2dv. La situación económica total de Inés es que tiene 2.000 ptas. Si tiene 6.000 ptas. en el banco, ¿cuánto dinero debe a la caja de ahorros?

pnp3dv. Tomás tiene 5.000 ptas. en el banco y debe 4.000 ptas. a la caja. ¿Cuánto dinero tiene en total?

npn1dv. La situación económica total de Silvia es que debe 300 ptas. Si tiene 4.000 ptas. en el banco, ¿cuánto dinero debe a la caja?

npn2dv. La situación económica total de Sandra es que debe 2.000 ptas. Si debe 5.000 ptas. a la caja, ¿cuánto dinero tiene en el banco?

npn3dv. Sara tiene 2.000 ptas. en el banco y debe 3.000 ptas. a la caja. ¿Cuánto dinero debe en total?

nnn12dv. La situación económica total de Víctor es que debe 7.000 ptas. Si debe 2.000 ptas. al banco, ¿cuánto dinero debe a la caja?

nnn3dv. Luis debe 2.000 ptas. al banco y debe 4.000 ptas. a la caja. ¿Cuánto dinero debe en total?