

# Estudio del comportamiento de alumnos de Magisterio en la resolución de problemas mal definidos

*A. Noda, J. Hernández y M. M. Socas*

Universidad de La Laguna

## RESUMEN

En este trabajo, tras una revisión bibliográfica de la noción de problema, donde observamos los múltiples intentos de caracterizarla, organizarla y clasificarla, así como la existencia de las dificultades para hacer clasificaciones precisas de los problemas, presentamos una propuesta de caracterización de problemas bien y mal definidos y mostramos los resultados de una experiencia con alumnos universitarios, a los que se les ha enfrentado a la resolución de problemas mal definidos en diferentes contextos, con el objetivo de analizar su comportamiento en la fase de preparación. Los datos muestran las dificultades que tienen los alumnos para diferenciar los problemas mal definidos, que varían según los contextos, y cómo sus actuaciones están dirigidas, principalmente, por el objetivo del problema y por la tipología del mismo (faltan o sobran datos), encontrándose algunos comportamientos regulares (invariantes).

## ABSTRACT

In this work, after a bibliographical review of the problem notion, where we observe the multiple attempts at characterizing, organizing and classifying it as well as the existence of the difficulties to make precise classifications of the problems, we put forward a proposal for characterizing well and badly defined problems and we give the results of an experience carried out with university students who worked on badly defined problems in various contexts in order to analyse their behaviour at the preparation stage. The data obtained show the difficulties students have in differentiating badly defined problems, which vary according to the context, and how their actions are determined mainly by the aim of the problem and by its typology (too few or too many data). Some regular types of behaviour (invariants) are also found.

## Introducción

La resolución de problemas matemáticos es reconocida tanto por la teoría como por la práctica educativa en Matemáticas como la actividad cognitiva más importante en esta materia. Por ello, la resolución de problemas siempre ha sido el tema central en Matemáticas y también en otras disciplinas científicas. Cuando hablamos de resolver problemas en el contexto tradicional de nuestra escuela estamos pensando en problemas de Matemáticas o en problemas científicos, que son problemas bien definidos y bien estructurados, y excluimos los no científicos o cotidianos que son problemas del mundo real o de las ciencias sociales, por lo general mal estructurados o mal definidos, cuya resolución requiere «toma de decisiones» de diversos tipos para definirlos bien y darles una estructuración adecuada que permita vislumbrar alguna solución.

Observamos, que la resolución de problemas bien definidos y estructurados aparece en los currículos de las áreas de tipo científico de las distintas etapas educativas, mientras que los problemas mal definidos o mal estructurados, que son en general problemas cotidianos y no científicos, quedan excluidos del currículo al no tener cabida ni en las ciencias sociales, que tienen un carácter más descriptivo y narrativo, ni en las Matemáticas, ni en las otras disciplinas científicas, que se ocupan de los problemas bien definidos y estructurados.

Ahora bien, cabe plantearse si es realmente útil y consistente la separación entre problemas científicos y no científicos o cotidianos y si la escuela debe centrarse exclusivamente en la enseñanza de problemas científicos; y, en este marco, preguntarse por el papel que deben jugar las Matemáticas en particular.

El objetivo de este trabajo es doble. Por un lado, aportar datos que ayuden a clarificar las cuestiones planteadas y por otro, mostrar los resultados de una experiencia con alumnos universitarios a los que hemos propuesto una colección de problemas que hemos caracterizado como «mal definidos». Para ello, comenzamos abordando la resolución de problemas desde la Psicología, la Matemática y la Educación Matemática para posteriormente hacer una propuesta de organización conceptual de los términos usados y terminar, finalmente, con el diseño y resultados obtenidos de la experiencia.

Tanto los psicólogos como los matemáticos se han preocupado por caracterizar y organizar la resolución de problemas y han facilitado diferentes caracterizaciones y clasificaciones de los mismos atendiendo a distintas variables.

## **La noción de problema**

Presentamos ahora en una breve y sucinta exposición las caracterizaciones y organizaciones más relevantes que tienen que ver con la organización conceptual propuesta y con la experiencia mencionada.

A pesar de ser la caracterización de un problema una noción más o menos intuitiva que todos poseemos por estar enfrentándonos constantemente a ellos, han surgido, tanto en Psicología como en Educación Matemática, diferentes definiciones que no satisfacen de manera general, por pretender presentar estas definiciones desde una teoría general de la resolución de problemas con la intención en muchos casos de zanjar la discusión sobre lo que es verdaderamente un problema. Una pretensión de este tipo parece inabordable. Así, las diferentes definiciones que nos encontramos en la literatura van desde las posiciones en las que un problema está caracterizado por el contenido de la tarea o de la situación problema, independientemente del resolutor, como es el caso en Matemáticas, en Lógica Formal o en Inteligencia Artificial, hasta la Psicología que se coloca al lado del sujeto independientemente del contenido de la tarea. Una posición intermedia se encuentra en los trabajos en Educación Matemática donde se enfatiza la necesidad de caracterizar los problemas con referencias tanto al resolutor como a la tarea. Como señala Puig (1993) podemos hablar de un nivel I de análisis de la noción de problema cuando consideramos únicamente al problema, sin relación con el sujeto (nivel II) y sin relación con la institución escolar (nivel III).

Con relación a la Matemática nos encontramos que la noción de problema es de nivel I y está asociada al contenido de la tarea y significa «hacer» o «construir algo», y se distingue a veces, de otro tipo de enunciados como los teoremas (en los Elementos de Euclides, por ejemplo).

Con relación a la Psicología, múltiples son los intentos para caracterizar la noción de problema desde un nivel II. Una definición representativa es la de Chi y Glaser (1986): *un problema es una situación en la que se intenta alcanzar un objetivo y se hace necesario encontrar un medio para conseguirlo.*

Siguiendo los planteamientos de la teoría del procesamiento de la información, sustentada en los trabajos en el campo de la Inteligencia Artificial, que consideran a los resolutores como procesadores de información, los problemas pueden ser considerados con una estructura similar.

En Newell y Simon (1972) nos encontramos que en un problema existe un estado inicial, determinado por la situación en la que se encuentra el sujeto en el momento de enfrentarse al mismo: conocimientos sobre el problema, actitudes, motivaciones, habilidades, etc.; un estado final, caracterizado

por el objetivo o la meta que se precisa alcanzar, y un espacio del problema, formado por todas las posibles operaciones que deben realizarse para alcanzar el estado final.

Una caracterización significativa en Educación Matemática desde un nivel II la encontramos en Schoenfeld (1985, p. 74): *Ser un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es una relación entre el individuo y la tarea lo que hace la tarea un problema para esa persona. La palabra problema se usa aquí en su sentido relativo, como una tarea que es difícil para el individuo que está intentando resolverlo. Más aún, esa dificultad ha de ser un atolladero intelectual más que un cálculo (...). Por enunciar las cosas más formalmente, si uno tiene acceso a un esquema de solución para una tarea matemática, esa tarea es un ejercicio y no un problema.*

### **Tipologías de problemas**

Junto a estos intentos de caracterizar la noción de problema aparece la necesidad de organizarlos, de clasificarlos, mezclándose en muchos trabajos caracterización y organización.

Entre las clasificaciones desde el punto de vista Matemático nos encontramos con la de Polya (1957), como la más representativa, que los divide en *problemas de probar* y *problemas de encontrar*. En un problema de encontrar hay incógnita, datos y condición, y en un problema de probar hay hipótesis y conclusiones. Señalaremos además, que aunque la distinción entre el problema de encontrar y el problema de probar es clara, en el proceso de resolución puede transformarse en uno del otro tipo. Cualquier problema de encontrar se transforma en uno de probar si se hace una conjetura sobre su resultado. Un problema de probar si se delimitan unos objetivos y unas relaciones entre ellos, de manera que la conclusión sea una relación con otro objeto que se toma como incógnita, el problema de probar se transforma en problema de encontrar esa incógnita.

El punto de vista de la Psicología resalta en todas sus definiciones como característica esencial la presencia de un objetivo que queremos alcanzar, apareciendo el problema en sí en el momento en que debemos determinar como lograr dicho objetivo. De esta manera la clasificación más extendida en Psicología consiste en organizar los problemas en dos clases: *problemas bien definidos* y *problemas mal definidos*. En el primer caso existe un consenso sobre el objetivo o estado final y se considera resuelto cuando el sujeto alcanza dicho estado, por ejemplo «resolver una ecuación algebraica» o el «juego

de ajedrez»; en el segundo caso no existe un consenso sobre el objetivo o estado final, es decir, no podemos determinar la existencia de un único estado final, por ejemplo «componer una poesía» o «cómo luchar contra el desempleo». En los problemas mal definidos, la definición de los objetivos forma parte del problema.

Esta categoría ayuda a establecer diferencias basadas en el grado de definición de los objetivos, pero presenta bastantes inconvenientes ya que la mayoría de las veces no está claro si un problema pertenece a una u otra categoría.

Voss y otros (1983) critican esta clasificación y proponen la utilización de las clasificaciones de Reitman (1965) o Simon (1973), que en esencia sugieren diferenciar los distintos problemas a través de la caracterización de sus estructuras mediante las condiciones bajo las cuales se resuelve el problema. De esta manera organizan los problemas en *problemas bien estructurados* y *mal estructurados*, problemas que de hecho como señala Simon (1973), forman un continuo entre ambos, de manera que muchos problemas mal estructurados pueden convertirse a lo largo de la resolución en problemas bien estructurados.

Reitman (1965) planteó cuatro categorías de problemas según lo bien o mal que estuvieran especificados el *estado inicial* y el *estado final*:

1. Estado inicial bien definido y estado final bien definido.
2. Estado inicial bien definido y estado final mal definido.
3. Estado inicial mal definido y estado final bien definido.
4. Estado inicial mal definido y estado final mal definido.

Simon (1973), analizando la estructura del problema, distinguió entre problemas *bien estructurados* y problemas *mal estructurados*. Los problemas bien estructurados son aquellos que encontramos en los textos escolares. En ellos la información necesaria para resolverlos está contenida en el enunciado, las reglas para encontrar la solución correcta son claras y se tienen criterios definidos para verificar la solución. En el otro extremo están los problemas mal estructurados que son similares a los problemas que nos encontramos en la vida diaria.

Una crítica a esta clasificación la encontramos en Frederiksen (1984) que sugirió que la dicotomía entre problemas bien y mal estructurados era demasiado simple para abarcar todas las variantes de la estructura de un problema. Propone las siguientes categorías:

*Problemas bien estructurados*: Están claramente formulados. Se resuelven mediante aplicación de un algoritmo conocido. Se dispone de criterios para comprobar que la solución es correcta.

*Problemas estructurados que requieren pensamiento productivo:* Similares a los problemas bien estructurados, pero el resolutor tiene que diseñar total o parcialmente el procedimiento de resolución. En general hay que añadir algo que no está inmediatamente aparente en el problema.

*Problemas mal estructurados:* Falta de formulación clara. Falta de un procedimiento que garantice la solución. Falta de criterios para determinar cuando la solución se ha conseguido.

Dando como ejemplo para Matemáticas de problema bien estructurado: «el cálculo del área de un triángulo conocida la longitud de sus lados»; como ejemplo de un problema estructurado que requiere pensamiento productivo el problema de probar que «si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos e iguales, entonces el otro par de lados son también iguales»; y como ejemplo de un problema mal estructurado el problema de «encontrar todos los caminos posibles de mi casa a la escuela».

Estas clasificaciones de Simon (1973) y de Frederiksen (1984) son también criticadas por Kilpatrick (1987) porque tienen diferentes puntos oscuros, y señala la falta de distinción entre problemas en los que la información para una completa formulación falta y los problemas en los que, teniendo una completa formulación, el procedimiento de resolución es desconocido.

En Educación Matemática la mayoría de las clasificaciones están dirigidas a segmentar el continuo que va desde el ejercicio a las situaciones problemáticas.

Entre las más significativas está la de Butts (1980) que establece cinco categorías que van desde el ejercicio al verdadero problema:

*Ejercicios de reconocimiento:* Resolver, reconocer o recordar una definición o proposición.

*Ejercicios de algoritmos:* Ejercicios que pueden ser resueltos con un algoritmo, normalmente numérico.

*Problemas de aplicación:* Problemas formulados en un enunciado concreto, normalmente escrito, que suponen utilizar algún algoritmo conocido.

*Problemas de investigación:* Problemas cuyas proposiciones no contienen ninguna estrategia para representar el problema.

*Situación problema:* Plantear situaciones que puedan requerir soluciones matemáticas.

En esta misma línea están las clasificaciones de Charles y Lester (1982) y Borassi (1986).

En estas clasificaciones la inclusión de un problema en una u otra categoría solo puede hacerse en función del resolutor.

Otros intentos, con un enfoque más curricular dentro de Educación Matemática, sugieren clasificar los problemas en Problemas Rutinarios y No Rutinarios. Los *problemas rutinarios* se caracterizan porque plantean situaciones concretas (presentan una información mínima), los datos son los necesarios para resolver el problema (no hay que discriminar), las operaciones son las de la aritmética, la solución es única, el proceso de decidir la operación/es es un proceso de reglas, el contexto es aprendido en la escuela en el momento planteado, es decir, presentan una relación directa con las operaciones simbólicas (en general, primero se aprende la operación y luego se ponen problemas donde se utilicen dichas operaciones)... Los *problemas no rutinarios* se caracterizan porque plantean situaciones maximales, reales (compras, vacaciones,...) con grupos de estudiantes, la información en general no viene dada sino que hay necesidad de buscarla, las operaciones son utilizadas con significación, la solución es correcta pero no única, no presentan una relación directa con operaciones simbólicas sino que hay que relacionar cosas sabidas...

Más recientemente, Pehkonen (1991, 95) intenta conjugar las clasificaciones más significativas de la Psicología Cognitiva y de la Educación Matemática y aboga por la clasificación de problemas en *abierto* y *cerrado*. Esta distinción la hace en función del punto de partida (enunciado) y del punto de llegada o meta (solución), proponiendo la siguiente clasificación:

META PARTIDA	CERRADO (Exactamente explicada)	ABIERTO
CERRADO (Exactamente explicada)	Problemas cerrados	-Problemas abiertos -Situaciones de la vida real -Investigaciones -Sucesiones de problemas -Variaciones de problemas
ABIERTO	-Situaciones de la vida real  -Problemas variados	-Situaciones de la vida real -Proyectos -Plantear el problema -Variaciones de problemas

## Caracterización y descripción de la experiencia

Como señalan Greeno (1978) y Kilpatrick (1987) existen muchas dificultades para hacer clasificaciones precisas de los problemas, ya que muchos de ellos presentan aspectos comunes en las diferentes categorías. Parece razonable pensar que la elaboración de unas categorías generales que incluyan todos los tipos de problemas que se dan en esta segmentación del continuo no es posible, a menos que nos quedemos en clasificaciones dicotómicas. Sin embargo, pensamos que estas clasificaciones dicotómicas pueden ser útiles como punto de partida para la elaboración de teorías locales. Surge en nuestro trabajo la necesidad de elaborar unas categorías generales, a modo de «modelo de competencia», es decir, un modelo formal abstracto de problema que caracteriza una situación ideal en relación a un usuario ideal, que permita, al menos a nivel «local», una organización que incluya todos los tipos de problemas que queríamos tratar.

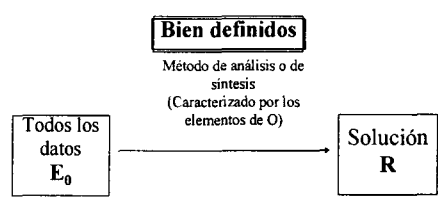
En esta caracterización «local», siguiendo a Polya (1945), nos pareció razonable considerar problemas de Matemáticas tanto a los problemas como a los teoremas y aceptar como una clasificación de problemas de nivel I, a los problemas de encontrar y los problemas de probar. En este trabajo tomamos en consideración únicamente los «problemas de encontrar» de la clasificación de Polya. Adaptamos algunos elementos utilizados en la definición de espacio problema de Newell y Simon (1972). Un término que hemos tenido que introducir es el de «Estados Semióticos» de un problema de encontrar bien o mal definido, como el conjunto de representaciones semióticas del problema que el resolutor ideal generaría desde el estado inicial  $E_0$  hasta el estado final  $R$ . Las nociones de estado inicial, estados finales deseados, operadores, etc., aparecen claramente determinados, en Newell y Simon, 1972, p. 810.

Señalar que mientras estos autores se refieren en su definición a las diferentes representaciones cognitivas del problema que hace el resolutor a partir del entorno de la tarea, nosotros hablamos de un «modelo de competencia formal» y de las representaciones semióticas posibles de las soluciones del problema realizadas por un resolutor ideal. La idea de describir los problemas en términos de estados y operadores que permiten pasar de un estado a otro se origina en los años cincuenta en trabajos sobre resolución de problemas en el campo de la inteligencia artificial y es utilizado en estudios desde la Psicología, que concibe a los resolutores como procesadores de la información. En Newell y Simon (1972) encontramos una primera teoría de este estilo.

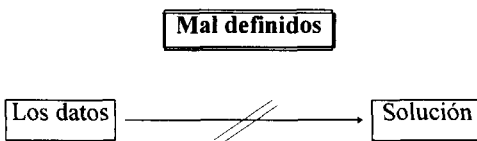


De esta manera, un problema de encontrar queda determinado por la terna  $\langle E, O, R \rangle$  donde  $E$  es el conjunto de estados semióticos,  $O$  el conjunto de operadores y  $R$  el conjunto de soluciones, siendo  $E = \{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ , con  $E_n \in R$ , y  $E_0$  el estado inicial, formado por el conjunto de los datos dados.

Caracterizamos el *Problema de encontrar bien definido* cuando en la terna anterior:  $E_0 \neq \emptyset \wedge \exists (E_i)_{i \in \{0,1,\dots,n\}} \wedge E_0 \subset E_i, \forall i \in \{1,\dots,n\}$ . Es decir, cuando es posible desencadenar un proceso de resolución que relaciona todos los datos con la solución mediante algún método de análisis o síntesis: numérico, algebraico o de otro tipo.



Esta caracterización debe ser considerada como un modelo de competencia formal, de carácter local, donde el conjunto de estados semióticos  $E$  se recorre linealmente por un resolutor ideal (Polya, 1957), pasando de uno a otro cuando el anterior ha finalizado. Debemos señalar que Schoenfeld (1985) realiza su trabajo, en otra dirección, observando el comportamiento de los resolutores reales e intenta categorizar sus conductas, elaborando con ello un modelo de actuación, no un modelo de competencia formal.



Ahora bien, si en la definición anterior consideramos nuevamente la terna  $\langle E, O, R \rangle$  y negamos las condiciones que caracterizaban al problema de encontrar bien definido, quedará caracterizado el *Problema de encontrar mal definido* cuando  $E_0 = \emptyset \vee$  no existe  $(E_i)_{i \in \{0,1,\dots,n\}} \vee E_0 \not\subset E_i, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ . Es decir, que la relación entre los datos y la solución no es posible.

Esto nos permite organizar los problemas de encontrar mal definidos en: Tipo I (faltan datos) cuando  $E_0 = \emptyset$ , Tipo II (faltan datos) cuando  $E_0 \neq \emptyset \wedge$  no existe  $(E_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ , Tipo III (sobran datos) cuando  $E_0 \neq \emptyset \wedge \exists (E_i)_{i \in \{1,\dots,n\}} \wedge E_0 \not\subset E_i, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ , es decir, cuando  $E_0 \neq \emptyset \wedge \exists (E_i)_{i \in \{1,\dots,n\}} \wedge \exists e \in E_0 \wedge \forall i \in \{1,2,\dots,n\} e \notin E_i$ .

Queremos señalar que en este modelo de competencia los problemas de encontrar mal definidos se construyen explícitamente con un estado inicial  $E'_0$  que se obtiene modificando el estado inicial  $E_0$  de los problemas de encontrar bien definidos. Esto nos permite una organización más detallada de los problemas de encontrar mal definidos caracterizada por las modificaciones hechas al estado  $E_0$ .

De esta manera, los problemas «*mal definidos porque sobran datos*» se caracterizan por  $E_0 \subset E'_0$ , y son contruidos al añadir datos a  $E_0$ , distinguiendo: los que incluyen la solución en los datos añadidos ( $R-E'_0 = \emptyset$ ) y los que no la incluyen ( $R-E'_0 \neq \emptyset$ ). Los problemas «*mal definidos porque faltan datos*» se caracterizan por  $E_0 \not\subset E'_0$ , y se construyen eliminando datos de  $E_0$ , distinguiendo: los que resultan de eliminar todos los datos de  $E_0$  ( $E'_0 = \emptyset$ ), los que resultan de eliminar algunos datos de  $E_0$  ( $E'_0 \subset E_0$  y  $E'_0 \neq \emptyset$ ) y los que resultan de eliminar y añadir datos, respectivamente, de  $E_0$  ( $E'_0 \not\subset E_0$  y  $E'_0 \neq \emptyset$ ), pudiendo encontrarnos en este caso, con que  $E_0 \cap E'_0 \neq \emptyset$  o bien  $E_0 \cap E'_0 = \emptyset$ .

En esta experiencia consideramos los modelos de Dewey (1933) y de Bourne y otros (1979) para la resolución de un problema y analizamos, fundamentalmente, la fase de preparación, centrándonos en la actuación de los alumnos en esta fase, que en términos de Dewey se concreta en: Identificación de la situación problema, caracterización del problema, y análisis de medios-fines, esto es, cómo analizan e interpretan los resolutores los datos disponibles inicialmente, las restricciones y cómo identifican el criterio de solución.

Nuestro objetivo es analizar el comportamiento de los resolutores frente a problemas de encontrar mal definidos en contextos diferentes: aritmético y algebraico, tomando nuestra propuesta de caracterización como Modelo de Competencia que sirve de referencia a la ejecución de los resolutores.

## Método

### • Población

La experiencia se realizó con 9 alumnos de tercer curso de Maestro de la Especialidad de Educación Infantil del Centro Superior de Educación de la Universidad de La Laguna (Tenerife. España). Estos alumnos se caracterizan por su bajo nivel en conocimientos y razonamiento matemático ya que en su mayoría proceden de un bachillerato de Letras, y además su perspectiva profesional no requiere conocimientos formales de Matemáticas.

### • Instrumento

Pasamos una colección de 8 problemas mal definidos, cuatro mal definidos del Tipo II (faltan datos) (1A, 2A, 1B y 2B) y cuatro mal definidos del Tipo III (sobran datos) (3A, 4A, 3B y 4B), en los contextos aritmético y algebraico.

Fueron pasados en dos sesiones de una hora y en distintos días. La primera sesión (grupo A de problemas), con la indicación «Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo, indicar las razones» y la segunda sesión (grupo B de problemas), con la indicación «Resolver el siguiente problema. Si no puedes resolverlo por estar mal planteado, indicar por qué está mal planteado, plantearlo bien y resolverlo».

Esto lo realizan los alumnos de manera individual y por escrito.

Contexto	Algebraico	Aritmético	Aritmético	Algebraico
Mal definidos (M.D)	<b>M.D.-Tipo II</b> (Faltan datos) (1A-1B)	<b>M.D.-Tipo II</b> (Faltan datos) (2A-2B)	<b>M.D.-Tipo III</b> (Sobran datos) (3A-3B)	<b>M.D.-Tipo III</b> (Sobran datos) (4A-4B)

## Resultados

A modo de ejemplo, en este trabajo sobre problemas de encontrar mal definidos, analizamos el comportamiento de los alumnos frente a cuatro problemas (dos del grupo A y dos del grupo B): dos mal definidos Tipo II (faltan datos), en un contexto algebraico, que denominaremos 1A y 1B; dos mal definidos en un contexto aritmético, uno del Tipo II (faltan datos) que denominamos 2A y otro del Tipo III (sobran datos) que denominamos 3B.

**Problema 1A:** *En un corral hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay en el corral?*

Problema mal definido del Tipo 2, de contexto algebraico, caracterizado desde la competencia por  $E_0 \notin E'_0$  y de la clase  $E'_0 \subset E_0$  obteniendo el  $E'_0$  eliminando datos al  $E_0$ .

Este problema mal definido se considera construido a partir del siguiente problema bien definido: «En un corral hay gallinas y conejos. Hay 32 animales y 116 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay en el corral?»

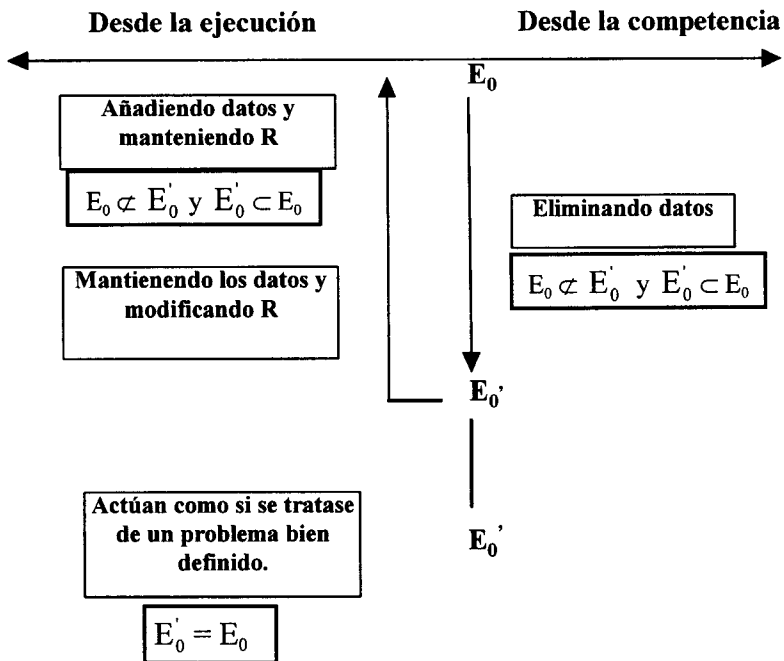
### Comportamientos:

Las diferentes actuaciones de los alumnos frente a este problema son las siguientes:

- 1) Un alumno actúa como experto y rápidamente se da cuenta que no es posible a partir del estado inicial obtener una solución, ya que no está bien determinado dicho estado porque faltan datos, pero no lo replantea.

- 2) Un alumno actúa como experto y rápidamente se da cuenta que no es posible a partir del estado inicial obtener una solución, ya que no está bien determinado dicho estado (faltan datos), replanteando el problema en uno bien definido, modificando el  $E'_0$ , añadiendo nuevos datos y manteniendo el objetivo o pregunta planteada (R). De esta manera, su actuación queda caracterizada por  $E_0 \not\subset E'_0$  y de la clase  $E'_0 \subset E_0$ .
- 3) Cinco alumnos identifican el problema mal definido como un problema bien definido de manera que interpretan el estado  $E'_0$  como el  $E_0$  y mantienen R.
- 4) Dos alumnos identifican el problema mal definido como un problema bien definido, pero de manera implícita lo transforman, de forma que mantienen  $E'_0$  y modifican R.

El análisis global de este problema, tanto desde la competencia como desde la ejecución se refleja en el siguiente diagrama:



**Problema 1B:** *A María le gusta pasear en bicicleta. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?*

Problema mal definido del Tipo 2, de contexto algebraico, caracterizado desde la competencia por  $\mathcal{R}$  y de la clase  $E'_0 \subset E_0$  obteniendo el  $E'_0$  eliminando datos al  $E_0$ .

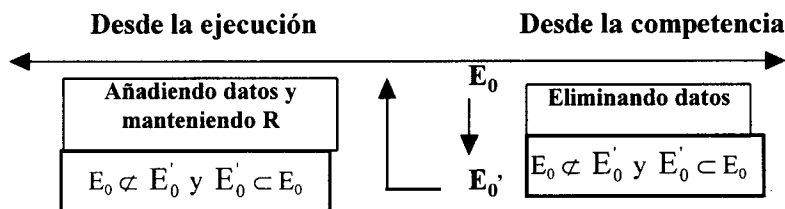
Este problema mal definido se considera construido a partir del siguiente problema bien definido: «A María le gusta pasear en bicicleta. La distancia que hay de su casa a la plaza del pueblo es 9 km. El sábado recorrió la mitad del camino de su casa a la plaza del pueblo, y por la tarde recorrió 3 km más. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la plaza?».

Comportamientos:

Las actuaciones de los alumnos frente a este problema son las siguientes:

- 1) Cinco alumnos actúan como expertos y rápidamente se dan cuenta que no es posible a partir del estado inicial obtener una solución, ya que no está bien determinado dicho estado porque faltan datos, pero no lo replantean.
- 2) Cuatro alumnos actúan como expertos y rápidamente se dan cuenta que no es posible a partir del estado inicial obtener una solución, ya que no está bien determinado dicho estado (faltan datos), replanteando el problema en uno bien definido, de manera que modifican el  $E'_0$ , añadiendo nuevos datos y mantienen el objetivo o pregunta planteada ( $\mathcal{R}$ ). De esta manera, su actuación queda caracterizada por  $E_0 \not\subset E'_0$  y de la clase  $E'_0 \subset E_0$ .

El análisis global de este problema, tanto desde la competencia como desde la ejecución, se refleja en el siguiente diagrama:



**Problema 2A:** La carta de un bar es la siguiente:

<i>Perros calientes</i>	<i>100 ptas.</i>	<i>Café con leche</i>	<i>75 ptas.</i>
<i>Papas fritas</i>	<i>85 ptas.</i>	<i>Coca cola</i>	<i>125 ptas.</i>
<i>Tostadas</i>	<i>100 ptas.</i>	<i>Hamburguesa</i>	<i>175 ptas.</i>

Si a Luis no le gustan los perros calientes, ¿cuánto pagó por el desayuno?

Problema del Tipo II de contexto aritmético, caracterizado, desde la competencia, por  $E_0 \neq E'_0$  y de la clase  $E'_0 \neq E_0 \wedge E_0 \cap E'_0 = \emptyset$ , obteniendo el  $E'_0$  eliminando y añadiendo datos al  $E_0$ .

Este problema mal definido se considera construido a partir del siguiente problema bien definido:

La carta de un bar es la siguiente:

<i>Perros calientes</i>	<i>100 ptas.</i>	<i>Café con leche</i>	<i>75 ptas.</i>
<i>Papas fritas</i>	<i>85 ptas.</i>	<i>Coca cola</i>	<i>125 ptas.</i>
<i>Tostadas</i>	<i>100 ptas.</i>	<i>Hamburguesa</i>	<i>175 ptas.</i>

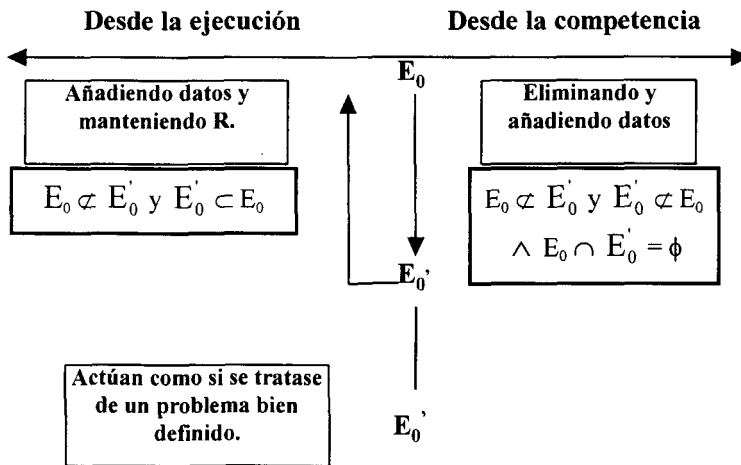
Si Luis desayuna un café con leche y tostadas, ¿cuánto pagó por el desayuno?

Comportamientos:

Las diferentes actuaciones de los alumnos frente a este problema son las siguientes:

- 1) Dos alumnos actúan como expertos y rápidamente se dan cuenta que no es posible a partir del estado inicial ( $E'_0$ ) obtener una solución, ya que no está bien determinado dicho estado, justificando que *es imposible resolverlo, porque no nos dicen que consume*, pero no lo replantean.
- 2) Cinco alumnos comentan que el problema con los datos dados no se puede resolver y hacen un nuevo replanteamiento del problema añadiendo nuevos datos y manteniendo el objetivo o pregunta planteada. En definitiva reconocen explícitamente que está mal definido y lo transforman en un problema bien definido, de manera que modifican el  $E'_0$  añadiendo datos y manteniendo R, quedando caracterizado por  $E_0 \neq E'_0$  y de la clase  $E'_0 \subset E_0$ .
- 3) Dos alumnos identifican el problema mal definido como un problema bien definido de manera que interpretan el estado  $E'_0$  como el  $E_0$  y mantienen R.

El análisis global de este problema, tanto desde la competencia como desde la ejecución se recoge en el siguiente diagrama:



**Problema 3B:** *Un conejo come 3 raciones de 460 g de alimento cada semana. Una gallina come 2 raciones de 460 g de alimento cada semana. Un año tiene 52 semanas. ¿Cuánto alimento comerán 5 gallinas en una semana?*

Problema mal definido del Tipo III de contexto aritmético, caracterizado, desde la competencia, por  $E_0 \subset E'_0$  y de la clase  $R \cdot E'_0 = \emptyset$ , obteniendo el  $E'_0$  añadiendo datos al  $E_0$ .

Este problema mal definido se considera construido a partir del siguiente problema bien definido:

*Una gallina come 2 raciones de 460 g de alimento cada semana. ¿Cuánto alimento comerán 5 gallinas en una semana?*

Comportamientos:

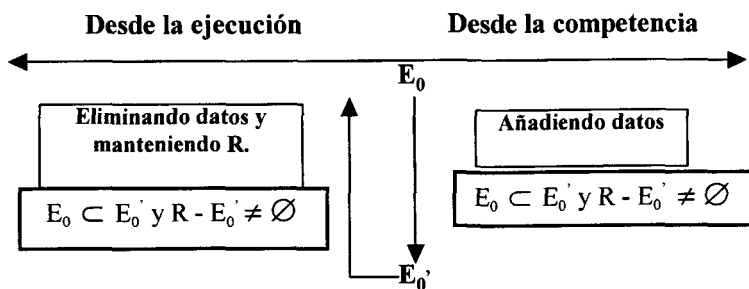
Las diferentes actuaciones de los alumnos frente a este problema son las siguientes:

- 1) Dos alumnos actúan como expertos y rápidamente comentan que el estado final (R) no está bien determinado, ya que en el estado inicial ( $E'_0$ ) se dispone de datos que no se pueden utilizar, pero no lo replantean.
- 2) Tres alumnos actúan como expertos y comentan que sobran datos, replanteando el problema en uno bien definido, de manera que fijan

el objetivo (R) y modifican el  $E'_0$ , eliminando datos para adecuar los restantes al objetivo o pregunta planteada, quedando caracterizado por  $E_0 \subset E'_0$  y  $R - E'_0 = \emptyset$ .

- 3) Cuatro alumnos no hacen ningún comentario y replantean el problema, modificando  $E'_0$  y R.

El análisis global de este problema, tanto desde la competencia como desde la ejecución se refleja en el siguiente diagrama:



De estos primeros análisis se observa que:

- En los problemas de encontrar mal definidos de contexto aritmético, la tendencia de los alumnos es identificar el problema como mal definido (7 alumnos en el 2A y los 9 en el 3B). Además observamos que ante un problema de Tipo II (faltan datos) los 5 alumnos que replantean el problema modifican (añaden) los datos del estado inicial ( $E'_0$ ) y mantienen el objetivo (R), en cambio ante un problema de Tipo III (sobran datos) un mayor número de alumnos (4 de los 7 que lo replantean) modifican  $E'_0$  y R.
- En los problemas de encontrar mal definidos de contexto algebraico, observamos que la tendencia no es identificarlo como un problema mal definido, como comentamos en los de contexto aritmético, ya que 5 alumnos identifican el problema 1A como un problema bien definido. En cuanto a las transformaciones que realizan, en el problema 1A (2 alumnos, de los 3 que replantean el problema) mantienen  $E'_0$  y modifican R, en cambio al enfrentarse al problema 1B, los cuatro alumnos que lo replantean, modifican  $E'_0$  añadiendo datos y mantienen R.
- En este análisis preliminar no encontramos diferencias entre los grupos A y B de problemas, en el análisis e interpretación de los datos disponibles inicialmente, en las restricciones y en la identificación del criterio



de solución. Su actuación en la fase de preparación es la misma, cuando se advierte que puede haber un problema mal planteado, que cuando se omite; parece que la indicación que sobresale es *resolver los siguientes problemas*.

## Consideraciones finales

A modo de consideraciones finales de este trabajo podemos señalar:

- El modelo de competencia local construido es de gran utilidad para caracterizar los diferentes problemas de encontrar bien y mal definidos y nos permite a partir de él analizar las actuaciones de los resolutores.
- La incorporación de problemas «mal definidos» hace más rica la fase de *preparación* en la resolución de un problema facilitando al investigador la interpretación y análisis que hace el resolutor de los datos disponibles inicialmente, de las restricciones y modificación de los datos y de los criterios de resolución.
- La indicación en el grupo B de problemas de que «puede haber algún problema mal definido» parece no tener consecuencias en la manera de actuar de los alumnos.
- El comportamiento frente a los problemas «mal definidos» sugiere tres grupos:
  1. Los que confirman que el problema está mal definido al no poder caracterizar  $E'_0$ .
  2. Los que actúan como si se tratase de un problema bien definido con solución única, independientemente de  $E'_0$ .
  3. Los que modifican  $E'_0$  o R y los transforman en un problema bien definido.

Por todo ello, consideramos la necesidad de incorporar los problemas mal definidos en el desarrollo curricular de la Matemática y en los trabajos de Investigación en Resolución de Problemas de Matemáticas, puesto que fomentan estrategias de resolución que ayudan o favorecen la resolución de los problemas bien definidos y, además, son necesarios ya que la resolución de éstos no es una consecuencia obvia del entrenamiento de los resolutores en problemas bien definidos.

## Reseñas bibliográficas

- BOURNE, L. E.; DOMINOWSKI, R. L., y LOFTUS, E. F. (1979): *Cognitive Processes*. Prentice-Hall, New Jersey.
- BORASSI, R. (1986): «On the Nature of Problems», *Educational Studies on Mathematics*, vol. 17, pp. 125-142.
- BUTTS, T. (1980): «Posing Problems Properly», en Krulik (ed.): *Problem Solving in School Mathematics*, pp. 23-33. NCTM, Reston, Virginia.
- CHARLES, R., y LESTER, F. (1982): *Teaching problem solving. What, Why, How*. Dale Seymour, Palo Alto.
- CHI, M., y GLASER, R. (1986): «Capacidad de resolución de problemas», en R. J. STERNBERG (ed.): *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información*, pp. 303-324. Labor, Barcelona.
- DEWEY, J. (1933): *How We Think*. D. C. Heath, Boston.
- FREDERIKSEN, N. (1984): «Implications of cognitive theory for instruction in problem solving», *Review of Educational Research*, 54, pp. 363-407.
- GREENO, J. G. (1978): «Natures of problem solving abilities», en W. K. ESTES (comp.): *Handbook of learning and cognitive processes*, vol. 5, pp. 239-270, Hillsdale, N. J. Erlbaum.
- KILPATRICK, J. (1987): «Problem Formulating: Where Do Good Problems come From?», en A. SCHOENFELD (ed.): *Cognitive Science and Mathematics Educations*. L.E.A., Hillsdale, New Jersey.
- NEWEL, A., y SIMON, H. (1972): *Human Problem Solving*. Prentice Hall, Englewood Cliff.
- PEHKONEN, E. (1991): «Problem solving in Mathematics», *ZDM*, vol. 1, pp. 1-4, Karlsruhe.
- (1995): «Using open-ended problems in mathematics», *ZDM*, vol. 2, pp. 55-57, Karlsruhe.
- POLYA, G. (1957): *How to solve it*. Princeton University Press, New Jersey. (Traducción castellana, *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México, 1976).
- PUIG, L. (1993): «Elementos para la instrucción en resolución de problemas de Matemáticas», tesis doctoral, Universitat de València.
- REITMAN, W. R. (1965): *Cognition and thought: An information processing approach*. Wiley, New York.
- SCHOENFELD, A. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Orlando.
- SIMON, H. A. (1973): *The structure of ill structured problems*. *Artificial Intelligence*, 4, pp. 181-201.
- VOSS, J. F.; SHERMAN, W. T., y YENGO, L. A. (1983): «Individual differences in the solving of social science problems», en R. F. DILLON y R. R. SCHMECK (eds.): *Individual differences in cognition*. Academic Press, New York.