Intuición y razonamiento en Geometría Elemental. Algunas situaciones prácticas

Agustín Morales González
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

RESUMEN

En este trabajo se presenta una serie de actividades geométricas que puede resultar de interés a la hora de distinguir los dos modos de comprensión y expresión del espacio geométrico: intuición y razonamiento.

ABSTRACT

In this paper, a series of geometrical activities is presented. This can be interesting to differentiate the two ways of comprehension and expression of geometrical space: intuition and reasoning.

Consideraciones generales

Tal como se explica en Alsina et al. (1987: 15), existen dos modos de comprensión y expresión del espacio geométrico que pueden considerarse como fases del desarrollo del pensamiento.

Uno de ellos se realiza de forma directa, es creativo y subjetivo, de naturaleza visual y corresponde a lo que podríamos llamar intuición geométrica.

El otro se realiza de forma reflexiva, es decir, lógica; es analítico y objetivo, de naturaleza verbal, y está caracterizado por la lógica.

También Puig Adam (1970a: 1), se refiere a ambos modos de conocimiento. Para dicho autor, la intuición (de in = dentro y tueor = mirar) vendría a ser una facultad maravillosa que posee el hombre que le permite adivinar o predecir el resultado de nuevas experiencias matemáticas con sólo imaginarlas. Nos advierte dicho autor que si bien esta facultad resulta preciosa, tanto para el científico puro como para el técnico, *no basta muchas veces para predecir ciertos resultados; y, lo que es peor, otras veces nos engaña sorprendentemente.* Y, a continuación, señala la importancia del raciocinio y de la lógica *no sólo para dar solidez y estabilidad al edificio científico construido con los materiales cognoscitivos que la experiencia y la intuición han aportado, sistematizándolos y organizándolos deductivamente, sino también para llegar por vía deductiva a predecir los resultados que la intuición, por sí sola es incapaz de alcanzar.*

En el ámbito de la Geometría Elemental existen muchas situaciones en las que se suele producir un choque entre lo sugerido por el sentido de la vista o por la intuición y los resultados que se obtienen mediante un razonamiento correcto.

Entendemos que estas situaciones, presentadas como indica Castelnuovo (1975: 77) *con un fino tacto pedagógico* a fin de que el alumno no llegue a desconfiar de todo lo que le viene dado por la observación, son especialmente interesantes dado que permiten distinguir las dos formas de conocimiento a las que nos hemos referido, lo que resulta fundamental para sentar las bases de la enseñanza de dicha Geometría.

En este trabajo se ha pretendido recopilar una serie de situaciones prácticas del tipo citado, en su mayoría trabajadas con nuestros alumnos del Centro Superior de Formación del Profesorado de Las Palmas, que suele resultar motivadora para ellos y que pensamos puede ser de utilidad al profesorado para abordar los dos modos de comprensión y expresión del espacio geométrico citados anteriormente. El orden de aparición de cada situación presentada no obedece a ninguna intención especial.

Relación de actividades

1. *El triángulo cuasirentángulo*

El profesor dispone de tres cuadrados recortados en cartulina, cuyos lados miden 4, 7 y 8 cm, respectivamente, sin que dé a conocer dichas medidas a los alumnos.

Sobre la pantalla del retroproyector se colocan los tres cuadrados y se disponen convenientemente de modo que se determine un triángulo cuyos lados miden precisamente 4, 7 y 8 cm, respectivamente, y se les pregunta qué le sugiere lo que ven en la pantalla. La simple observación visual motivará que muchos digan que se trata de un triángulo rectángulo y del Teorema de Pitágoras.

Si ahora sustituimos cada uno de los cuadrados opacos por otros construidos en acetato y convenientemente cuadriculados (en 16, 49 y 64 cuadrados, respectivamente), cabe esperar que aparezca la sorpresa: ¿Cómo es posible que siendo el triángulo supuestamente rectángulo, sea $4^2 + 7^2 > 8^2$, es decir, que no se verifique el Teorema de Pitágoras?

La obtención, mediante Trigonometría, de las medida, en grados, de los tres ángulos del triángulo clarifica la situación. En efecto, al ser las medidas aproximadas de 88,977°, 61,028° y 29,995°, respectivamente, el triángulo resulta ser acutángulo. ¡La vista engaña!

La actividad da pie para tratar de descubrir las desigualdades que permiten determinar si un triángulo de lados a, b y c dados es acutángulo, rectángulo u obtusángulo. A estos efectos, con el fin de que quede determinado un triángulo de cada tipo, pueden utilizarse siluetas de cuadrados construidas en acetato cuyas medidas (en cm) de sus lados sean, por ejemplo, las ternas que siguen: 4, 5 y 6; 6, 8 y 10; y 4, 5 y 8, respectivamente. Véase Castelnuovo (1976: 83-84).

Asimismo, la actividad ofrece la oportunidad de plantear el teorema recíproco del de Pitágoras, que establece que si un triángulo verifica la relación pitagórica, dicho triángulo es necesariamente rectángulo y cuya demostración quizás esté algo olvidada en el currículum de Secundaria, por lo que no suele ser conocida por nuestros alumnos. Quizás la demostración más simple es la que aparece en los Elementos de Euclides, que recordamos a continuación:

Sea un triángulo ABC, para el que suponemos que med(A) $\neq$ 90°. Supongamos que para dicho triángulo se verifica $a^2 = b^2 + c^2$ [1]. Construyamos un segundo triángulo A′B′C′, esta vez rectángulo en A', cuyos catetos A′B′ y A′C′ sean respectivamente iguales a AB y a AC, es decir, tal que $c' = c$ y $b' = b$. Al tratarse éste último de un triángulo rectángulo, es claro que debe ser $a'^2 = b^2$

+ c^2 [2]. De las igualdades [1] y [2] se sigue que $a^2 = a'^2$, lo que supone que a = a', esto es, los triángulos ABC y A'B'C' son iguales (tercer criterio de igualdad), y ABC es, por tanto, un triángulo rectángulo con ángulo recto en A.

Otras demostraciones de este teorema pueden verse en Rosenthal, J. (1994).

2. *Yuxtaposición de pirámides*

Se presentan a los alumnos dos tetraedros regulares congruentes construidos, por ejemplo, con el material conocido como «Polydron» y se les pregunta cuántas caras tendrá el cuerpo obtenido al yuxtaponer dos caras, una de cada uno de los tetraedros. La respuesta (6 caras) no tarda en llegar, basta hacer 4 + 4 - 2.

A continuación se toma uno de los tetraedros y una pirámide cuadrangular regular, cuyas caras sean congruentes con las de los tetraedros y se repite la pregunta. La sorpresa surge al comprobar que la respuesta (7 caras), obtenida al hacer 4 + 5 - 2, no es la verdadera. ¿Cómo es posible?

La actividad da pie a plantear el valor del ángulo diedro determinado por dos caras adyacentes de un tetraedro. La respuesta habitual (60°) no corresponde con la que proporcionada por el «Protractor» (instrumento para medir ángulos diedros) que es de unos 70°. En efecto, puede comprobarse que la medida de dicho ángulo viene dada por arccos (1/3) ≈ 70° 31′ 44″.

3. *El rollo de papel*

Un ejercicio cuya resolución resulta muy sencilla si nos percatamos de qué figura geométrica se «ve» si observamos de canto una hoja de papel, es el que sigue:

Hallar el diámetro total, D, y el número de vueltas, n, de la bobina que se obtiene al enrollar una longitud, l, de papel, de espesor e, alrededor de un tubo de cartón cuyo diámetro exterior es r.

En efecto, de la igualación del área del rectángulo, l·e, con el área de la corona circular dada por:

$$\frac{\pi}{4} D^2 - d^2)$$

se obtiene el valor buscado para el diámetro total de la bobina:

$$D = \sqrt{\frac{4}{\pi} le + d^2}$$

El número de vueltas viene dado por:

$$n = \frac{D - d}{2e}$$

Así, para l = 100 m, e = 0,1 mm, y d = 7 cm, resulta D ≈ 13,28 cm, y n ≈ 314 vueltas.

Debemos indicar que cuando hemos planteado este problema a alumnos del Centro Superior de Formación del Profesorado, tanto a futuros Maestros como a alumnos del Curso de Cualificación Pedagógica (C.C.P.), aquéllos que lo han resuelto lo han hecho mediante razonamientos de tipo de tipo inductivo de cierta complejidad y rara vez mediante el procedimiento expuesto.

4. *La cinta ceñida a la tierra*

Un ejercicio interesante para la puesta a prueba de la intuición geométrica es el propuesto en Puig Adam (1970a: 1): *Propongamos a nuestro interlocutor que imagine una cinta metálica ceñida a la superficie de la Tierra, a lo largo del Ecuador, y preguntémosle si al cortarla e intercalar un trozo adicional de un metro se separaría un poco o mucho la cinta de la Tierra.*

Como señala Puig Adam, aquéllos que responden guiados únicamente por su intuición estiman que tal separación resultaría imperceptible. Un cálculo sencillo permite obtener el valor para la separación igual a $100{:}2\pi \approx 16$ (cm), constante cualquiera que sea el radio de la esfera de partida. Aún en el caso de que la esfera se redujese a un punto en el espacio, el resultado sería el indicado.

Existen variantes de este ejercicio tal como el que plantea el comparar la distancia que recorre la cabeza de un hombre de 2 m de altura que da una vuelta completa a la Tierra, partiendo del Polo Norte, siguiendo un meridiano, respecto de la recorrida por sus pies. El resultado (unos 12 m, con independencia del radio) no deja de sorprender.

También podríamos proponer el problema de la cinta, considerando ahora un cubo de arista *a*, en vez de una esfera. La separación ahora es de 12,5 cm, para todo valor de la arista.

5. *Palmos en una circunferencia*

En un grupo de trabajo con profesores de Matemáticas, el profesor M. Kindt propuso el problema que sigue:

Un observador se fija en un punto del aula en la que se encuentra, situado a la altura de su hombro, y alinea su ojo, dicho punto, y el extremo de su dedo pulgar, manteniendo el brazo extendido, en posición horizontal. A continuación gira sobre su talón, de modo que el extremo de dicho dedo describa una circunferencia completa contenida en el plano horizontal. Se pregunta cuál es la medida aproximada de la longitud de dicha circunferencia, si se utiliza como unidad el palmo del observador.

Resulta común oír que el número de palmos dependerá de la medida del palmo de la persona que realice la experiencia. ¿Es ello cierto?

6. *El área del cuadrilátero*

El citado profesor Kindt plantea la situación que sigue, en la que una correcta intuición geométrica resulta esencial para responder correctamente.

Un profesor de Matemáticas recibe una llamada telefónica de un pariente en la que le solicita que le proporcione una fórmula que le permita determinar el área de una habitación, que tiene forma de cuadrilátero convexo, de la que ha obtenido las medidas, a, b, c, d, de sus cuatro lados.

La no existencia de una fórmula que permita obtener tal área con el conocimiento exclusivo de las medidas de los cuatro lados se evidencia al materializar un cuadrilátero mediante el «Mecano» y comprobar de inmediato la articulabilidad del mismo, lo que supone la existencia de una infinidad de cuadriláteros distintos con lados a, b, c, d, dados.

Como ampliación, cabría considerar distintas fórmulas que permiten obtener el área de un cuadrilátero. Entre ellas, las siguientes (véase Puig Adam (1970a y 70b):

a) Si α es el ángulo que forman los lados de medidas a y b, y β es el ángulo que forman los de medidas c y d, se tiene:

$$A = \frac{1}{2} ab \cdot \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2} cd \cdot \operatorname{sen}\beta,$$

b) Si d y D representan las medidas de las diagonales y á el ángulo que forman dichas diagonales, tenemos:

$$A = \frac{1}{2} d \cdot D \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

c) Si p es el semiperímetro y $(\alpha + \beta)$ la suma de dos ángulos opuestos, se tiene:

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \bullet \cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})}$$

Obsérvese que el área máxima se obtiene para $\alpha + \beta = 180°$, es decir, cuando el cuadrilátero es inscriptible.

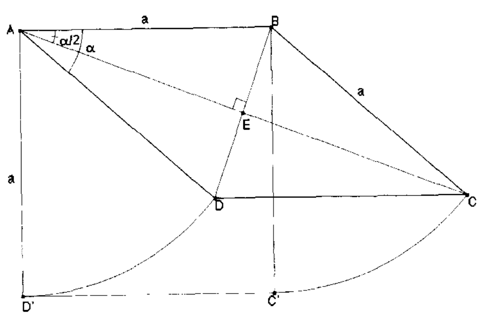
Asimismo, haciendo d = 0, se obtiene la conocida fórmula de Herón que permite hallar el área de un triángulo conocidas las medidas de sus tres lados.

Otra actividad que consideramos de interés es la que supone la cuadratura del polígono, es decir, la obtención gráfica de un cuadrado equivalente a un polígono dado. La utilización del CABRI suele resultar muy motivadora.

7. *La suma de las diagonales de rombos isoperimétricos*

Visto el problema anterior y dada la articulabilidad del rombo, cabría considerar el que sigue: ¿Es constante la suma de las diagonales de los infinitos rombos cuyos lados miden *a* unidades?

Al proponer este ejercicio es usual oír respuestas afirmativas, basadas en la idea de que «lo que una de ellas pierde lo gana la otra». De nuevo la consideración de los casos límite disipa las dudas. En efecto, en relación con la figura adjunta, para $\alpha = 0$, es $d = 0$ y $D = 2a$, por lo que la citada suma es $S(0) = 2a$, mientras que para $\alpha = \pi/2$ (el rombo deviene en cuadrado), se tiene: $d = D = \sqrt{2}\, a$, y $S(\pi/2) = 2\sqrt{2}\, a$.



Cabe pues plantear la obtención de la función $S(\alpha) = D(\alpha) + d(\alpha)$, que nos dará el valor de la suma de las diagonales del rombo en función del ángulo α. Siendo los valores de las diagonales los que siguen:

$$D(\alpha) = 2a \bullet \cos(\frac{\alpha}{2}) \qquad d(\alpha) = 2a \bullet \mathrm{sen}(\frac{\alpha}{2})$$

Será:

$$S(\alpha) = 2a \left[\cos(\frac{\alpha}{2}) + \mathrm{sen}(\frac{\alpha}{2}) \right]$$

Puede proponerse a los alumnos el estudio de dicha función, sus extremos, su representación gráfica, etc.

Cabe señalar que, si bien la suma de las diagonales no es constante, sí lo es la suma de sus cuadrados: $D^2(\alpha) + d^2(\alpha) = (2\ a)^2$.

8. *Variación del área de un rectángulo*

«Si la base de un rectángulo aumenta un 10%, mientras que su altura disminuye también un 10% ¿Qué ocurre con el área?»

El ejercicio propuesto, que supone manejar porcentajes, suele causar cierto desconcierto en clase. De nuevo la intuición suele engañar a los estudiantes, haciéndoles pensar que no se va a producir variación alguna. Veamos lo que en realidad ocurre:

Si a y b son las medidas de la base y altura del rectángulo original, su área, A, viene dada obviamente por $A = a\ b$.

Las dimensiones del nuevo rectángulo serán, $a' = 1{,}1\ a$, y $b' = 0{,}9\ b$, por lo que su área será ahora $A' = 0{,}99\ a\ b = 0{,}99\ A$, es decir, el área disminuye un 1%.

El problema puede generalizarse considerando que el porcentaje de variación sea del x%, lo que nos permitirá obtener la función ΔA% (x), que da la variación (disminución) porcentual del área, cuya expresión, con independencia de los valores a y b, resulta ser:

$$\Delta A\%(x) = \frac{x^2}{100}$$

con $0 \leq x \leq 100$.

Asimismo, podemos considerar la variación (aumento) porcentual del perímetro ΔP% (x), obteniendo para ésta la siguiente expresión lineal, que ahora sí depende de *a* y *b*:

$$\Delta P\%(x) = \frac{a-b}{a+b}x$$

con $0 \leq x \leq 100$.

La tabla que sigue, para un rectángulo inicial tipo DIN A-4 (297 x 210) puede resultar clarificadora:

Porcentaje (x)	*Variación porcentual del área (disminución)*	*Variación porcentual del perímetro (aumento)*
0	0	0
10	1	1,716
20	4	3,432
30	9	5,148
40	16	6,864
50	25	8,580
60	36	10,296
70	49	12,012
80	64	13,728
90	81	15,444
100	100	17,160

9. *La copa de cava*

En Alsina (1998: 38-40) se presenta un bonito problema cuya solución puede resultar sorprendente. Se trata de calcular la fracción del volumen de una copa de cava, de forma cónica, que bebería una persona cuya copa se haya llenado hasta la mitad de su altura.

Unos sencillos cálculos algebraicos permiten comprender que sólo bebe un octavo de la copa llena y que para beber la mitad de su contenido debería llenar la copa hasta un 79,37% de su altura.

Podría plantearse también la construcción de una tabla de valores y la correspondiente gráfica, en la que apareciera como variable independiente,

x, el porcentaje de la altura total que alcanza el líquido y, como variable dependiente, y, el porcentaje de volumen llenado. Puede constatarse que la expresión

$$y = \frac{x^3}{10^4}$$

corresponde a la gráfica construida.

10. *Los cilindros de Galileo*

En Castelnuovo (1975: 131-133) se recoge el problema que presenta Galileo en su libro *Discursos y demostraciones en torno a dos nuevas ciencias.* Se trata de determinar si los dos cilindros que se obtienen al curvar oportunamente una hoja rectangular de dimensiones a y b $(a > b)$ tienen o no el mismo volumen.

Si llevamos a cabo la experiencia con una hoja de acetato DIN A-4, llenando los dos cilindros con arena, por ejemplo, al medir con una probeta graduada los volúmenes de arena correspondientes a cada uno de ellos, obtenemos que el de mayor radio tiene un volumen superior en un 41% al otro.

Ello se explica fácilmente si se tiene en cuenta que los radios de los respectivos cilindros son $R = a/2\pi$ y $r = b/2\pi$, mientras que sus alturas son b y a, respectivamente, por lo que la razón de los volúmenes es precisamente a/b, cuyo valor para las hojas DIN es 1,41, valor aproximado, como sabemos, de $\sqrt{2}$ (módulo de los rectángulos DIN).

Resulta interesante la forma en que Castelnuovo llega a la conclusión de que el cilindro de mayor radio tiene mayor volumen, mediante un razonamiento al límite.

Para Castelnuovo (1997: 36), las respuestas erróneas de los estudiantes de diferentes países cuando se les propone este problema son tan similares que puede afirmarse que *las estructuras mentales cara a grandes problemas en los que, como en éste, entra el concepto de función, no dependen de culturas, tradiciones ni razas.*

Podemos plantear la misma experiencia, pero doblando convenientemente la hoja para formar dos prismas triangulares regulares, o dos prismas cuadrangulares, hexagonales, etc., ¿Qué se obtendría en tales casos? ¿Cómo podría explicarse este hecho?

11. *Los rectángulos giratorios*

Castelnuovo (1975: 129-131) plantea otro problema interesante en relación con el concepto de volumen, que también desafía la intuición.

Se trata de considerar los dos cilindros que se generan cuando un rectángulo de dimensiones a y b $(a > b)$ gira alrededor de uno u otro de sus lados. Aún cuando pudiera parecer, que ambos cilindros tienen el mismo volumen ya que, como suele oírse al presentar en clase esta experiencia, «el espacio barrido es el mismo por tratarse del mismo rectángulo giratorio», otro sencillo cálculo algebraico nos permite comprender que el cilindro de mayor radio (a, en nuestro caso) tiene mayor volumen, siendo la razón de volúmenes el valor a/b. También en este caso un razonamiento al límite permite comprender la no igualdad de los dos volúmenes.

Podemos proponer una experiencia análoga a ésta, pero en la que pedimos comparar los volúmenes de los tres cuerpos geométricos que se generan cuando un triángulo rectángulo de catetos a y b, e hipotenusa c, gira alrededor de cada uno de sus lados.

La experiencia obtenida al proponerla a alumnos de diferentes niveles nos permite afirmar que suelen encontrar dificultades al obtener el volumen del cuerpo obtenido cuando el triángulo gira alrededor de la hipotenusa. Los cálculos se simplifican si se tiene en cuenta que la altura sobre la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo viene dada por la expresión $h = a\, b/c$, como fácilmente se deduce al considerar las posibles expresiones para su área.

12. *La Torre Eiffel*

También en este ejercicio, que aparece en Perelman (1986: 76), lo imprevisto del resultado suele sorprender al resolutor. Su enunciado es el siguiente: *La Torre Eiffel de París tiene 300 m de altura y está construida enteramente de hierro. Su peso total es de 8.000.000 kg. Se desea encargar un modelo exacto de dicha torre, también de hierro y que sólo pese 1 kg. ¿Qué altura tendrá?*

13. *Un teorema de Pappus*

En Martínez (1994) se recoge un teorema, debido a Pappus de Alejandría (siglo IV), que constituye la proposición 50 del libro VI de su obra más importante, la Synagoge o Colección, cuyo resultado es asimismo sorprendente.

Se pregunta cuáles son los puntos del espacio desde los cuales una circunferencia situada, por ejemplo, en el plano horizontal, se ve como una «verdadera» circunferencia. No crea el lector que la solución se limita a aquellos puntos situados sobre la recta perpendicular a dicho plano por el centro de la circunferencia.

Sorprende también los otros resultados que se recogen en el citado artículo.

Añadiremos para terminar que, evidentemente, podrían considerarse otras muchas situaciones que ponen a prueba nuestra intuición geométrica (Lúnulas de Hipócrates, problemas relativos a imágenes en el espejo, etc.). Resultan especialmente interesantes aquellas que se plantean haciendo referencia a representaciones planas de cuerpos tridimensionales en las cuales el sentido de la vista no siempre es de fiar. En todo caso, esperamos haber motivado la curiosidad del lector.

Bibliografía

ALSINA, C. (1998): *Contar bien para vivir mejor.* Barcelona: Rubes.

ALSINA, C. et al. (1987): *Invitación a la Didáctica de la Geometría.* Madrid: Síntesis.

CASTELNUOVO, E. (1975): *Didáctica de la Matemática Moderna.* México: Trillas.

– (1976): *La via della Matematica. La Geometria.* Firenze: La Nuova Italia.

– (1997): «Enseñanza de las Matemáticas: lo que es invariante en un mundo que cambia», *Uno* 12, 29-36.

MARTÍNEZ, M. (1994): «La curiosa historia de ... Dos o tres teoremas bastante paradójicos de Pappus». *Suma* 14-15, 111-112.

PERELMAN, Y. (1986): *Matemáticas recreativas.* Barcelona: Martínez Roca.

PUIG ADAM, P. (1970a): *Curso de Geometría Métrica. Tomo I - Fundamentos.* Madrid: Gómez Puig.

– (1970b): *Curso de Geometría Métrica. Tomo II - Complementos.* Madrid: Gómez Puig.

ROSENTHAL, J. (1994): «The Converse of the Pythagorean Theorem», *The Mathematics Teacher,* Vol. 87, 9, 692-693.